

Гребеников Е.А., Смутьский И.И. Эволюция орбиты Марса на интервале времени в сто миллионов лет / Сообщения по прикладной математике. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына. М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына. – 2007. 63 с.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А.ДОРОДНИЦЫНА  
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ СО РАН

---

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ГРЕБЕНИКОВ Е.А., СМУЛЬСКИЙ И.И.  
ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ МАРСА НА ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ В СТО МИЛЛИОНОВ  
ЛЕТ.

Москва -Тюмень, 2007 г.

Данное исследование содержит изложение новых результатов авторов, посвященных проблеме динамической эволюции Солнечной Системы на больших промежутках времени порядка сотни миллионов лет. Эти результаты получены нами численным интегрированием неупрощенных уравнений движения тел Солнечной системы, причем метод и уравнения отличны от тех, которые использовали другие исследователи. Результаты решения подвергались многосторонним тестированиям и были сопоставлены с обобщением данных наблюдения и расчетами других авторов. Это позволило обосновать выводы о периодах и амплитудах колебания параметров орбиты Марса и показать, что на исследованном интервале времени движения в Солнечной системе стабильны и не проявляется какая-либо тенденция к катастрофическим изменениям в ее геометрии и динамике.

## 1. Введение

**1.1. Формулировка проблемы.** Динамика тел Солнечной Системы на больших, космогонических интервалах времени представляет большой интерес по многим причинам. Этот интерес обусловлен, прежде всего, исследованием сложнейшей научно-философской проблемы – проблемы происхождения, эволюции и устойчивости Солнечной Системы, и связанной с ней, не менее важной проблемой образования и формирования больших планет, астероидов и спутников, а также геологической историей Земли. Этот интерес диктуется также исследованиями климата на нашей планете обитания и влиянием на него эволюции орбитального и вращательного движений Земли в рамках так называемой *Астрономической теории ледниковых периодов*.

Сошлемся здесь, например, на исследования эволюции решений уравнений движения больших планет Солнечной Системы на весьма больших интервалах времени, выполненные Ж.Ляскаром, Т.Куинном и другими известными специалистами [1-4]. В этих работах показано, что на промежутках времени порядка 100 млн. лет, 250 млн. лет и так далее, до 15 млрд. лет, элементы орбит отдельных планет (Меркурия, Марса, Венеры, Плутона и др.) достигали значений, существенно больших чем их «начальные» значения. Это позволило упомянутым исследователям сделать вывод о возможной неустойчивости Солнечной Системы и о хаотичном характере движений в ней (некоторые выдержки из работ Ж Ляскара мы приводим в Приложении 1). Эта проблема исследовалась ими на основе применения аналитических методов теории вековых возмущений и методов численного интегрирования осредненных по угловым переменным уравнений движения планет. Кроме того, Т.Куинн и его коллеги [3] решали эту задачу с помощью прямых методов численного интегрирования первоначальных уравнений движения на мощных суперкомпьютерах.

**1.2. Уравнения движения.** Астрономическая теория ледниковых периодов позволяет определить составляющую эволюции климата планеты, которая обусловлена изменением ее орбитального и вращательного движений. Для ее исследования мы численно решали задачу о взаимодействии одиннадцати тел Солнечной Системы (девять больших планет, Солнце и Луна ) на интервале времени в 100 млн. лет [5-7] , т.е. исследовали классическую ньютонову проблему 11-ти тел.

Согласно закону всемирного тяготения, тело с номером  $i$  притягивается телом с номером  $k$  силой

$$\vec{F}_{ik} = -G \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \vec{r}_{ik}, \quad (1)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,

$\vec{r}_{ik}$  – радиус-вектор до тела с массой  $m_i$  от тела с массой  $m_k$ .

Если количество тел равно  $n$ , то их воздействие на  $i$ -ое тело выражается суммарной силой

$$\vec{F}_i = -G m_i \sum_{k \neq i}^n \frac{m_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} \quad (2)$$

и, в соответствии с классическими законами динамики [8], движение тел в инерциальной системе отсчета определяется системой дифференциальных уравнений порядка  $6n$

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{k \neq i}^n \frac{m_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (3)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор тела  $m_i$  относительно центра масс (например, относительно барицентра Солнечной Системы).

Для  $n=11$  (девять больших планет, Солнце и Луна) уравнения (3) представляют собой систему дифференциальных уравнений, описывающих всевозможные движения в выбранной модели Солнечной Системы. Для нахождения какого-либо ее частного решения мы, очевидно, должны задать  $3n$  значений координат и  $3n$  значений компонент скоростей на определенную дату, которую в дальнейшем будем называть начальной эпохой с  $T_0 = 0$ . Мы использовали различные варианты методов численного интегрирования, при этом в качестве системы координат мы выбрали барицентрическую экваториальную систему координат, ось  $x$  которой направлена на точку весеннего равноденствия  $\gamma_0$  на эпоху 1950.0 г. с номером юлианского дня  $JD_S = 2433282.4234$ .

При рассмотрении взаимодействий тел Солнечной Системы часто, кроме гравитационных сил для материальных точек, учитывается множество «слабых» дополнительных физических и динамических факторов (например, воздействие астероидов и спутников планет, отличие формы планет от однородных шаров,

очевидно равнозначных материальным точкам, приливные силы, релятивистские эффекты, изменение массы тел со временем и т.п.). К примеру, в работах [3, 4] получена оценка влияния некоторых из указанных факторов и показано, что ими в принципе можно пренебречь. Константы взаимодействия многих дополнительных факторов определяются, как правило, по величине невязки между результатами, обусловленными ньютоновым взаимодействием и наблюдениями. Из этого, очевидно, вытекает, что в начале мы должны изучить, как можно точнее, эволюцию орбит планет в результате их гравитационного взаимодействия (1) и только после этого следует учесть воздействие любого из перечисленных выше более слабых факторов.

**1.3. Начальные условия.** Чтобы проще реализовать сравнительный анализ наших результатов с результатами других исследователей, мы выбрали в качестве начального момента дату 30.12.1949 г. с номером юлианского дня  $JD_0 = 2433280.5$ .

При этом мы сделали вычислительный эксперимент с использованием двух вариантов начальных условий. В основу первого варианта начальных условий были положены эфемериды DE 19 Лаборатории реактивного движения США (сокращенно – ЛРД, в английской транскрипции -JPL), взятые из *Справочного руководства* [8]. Для определения масс тел мы выполнили отдельное исследование имеющихся современных сведений о массах планет. К сожалению, численные данные о массах планет в специальной литературе сильно отличаются между собой. Например, для Плутона эта разница достигает порядка величины и более. В результате такого анализа мы определили значения масс планет и начальные значения их координат (они приведены в Таблице 1 Приложения 2). В статье Т.Куинна и др. [3] были использованы значения масс и начальные условия на ту же эпоху, но определенные по эфемериде DE102. Сравнивая наши и эти начальные условия, мы установили, что наибольшее отличие в массах имеется для массы Плутона, которое составляет почти 40%, в то время как массы Меркурия, Урана и Нептуна отличаются на десятые доли процента, а масса Солнца еще меньше – на 0.01%. Относительная разница в координатах положений планет и их скоростей составляет величину, меньшую  $5 \cdot 10^{-5}$ , что дает нам право считать, что сравнение полученных нами результатов с результатами других авторов более или менее корректно.

Для получения численных результатов, характеризующих динамическую эволюцию Солнечной Системы на промежутке времени в 100 млн. лет, сначала мы

использовали первый вариант начальных условий и для проверки метода, сравнили полученные численные результаты с современными данными наблюдений. Для того, чтобы убедиться в достоверности наших результатов, мы сочли необходимым использовать также второй вариант начальных условий, при котором координаты и скорости тел были определены на ту же начальную эпоху -30.12.1949.0 г., но в другой системе отсчета (а именно, 2000.0 г. с  $JD_S = 2451544$  и начальные условия для второго варианта были определены по известной JPL-теории DE 406/LE406, сведения о которой и программы для расчета представлены на сайте JPL Solar System Dynamics: <http://ssd.jpl.nasa.gov/>). Относительные значения масс были взяты из системы DE405, приведенные в работе Стэндиша Е.М. [9]. После этого мы модифицировали их значения с учетом величины  $G \cdot M_E$  и с использованием констант известной системы IERS (см. стр. 426 *Труды ИПА РАН* [10]). Эти исходные данные и начальные условия представлены в табл. 2 Приложения 2.

**1.4. Метод решения.** Несмотря на то, что в математической литературе существует большое разнообразие численных методов интегрирования дифференциальных уравнений (см., например, монографию Т.В.Бордовицыной [11]), мы пришли к выводу, что конечно-разностные методы интегрирования для нашего исследования не обеспечивают необходимую точность. Это обусловило необходимость разработки специального алгоритма и специальной программы, названной нами «Galactica», суть которого состоит в том, что значение вычисляемой функции в «следующий» момент времени  $t=t_0 + \Delta t$  вычисляется более точно чем в «обычных» схемах численного интегрирования, а именно, мы определяли значение координаты  $x$  с помощью ряда Тейлора

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} x_0^{(k)} (\Delta t)^k, \quad (4)$$

где  $x_0^{(k)}$  – производная порядка  $k$  в момент  $t_0$ , а целое число

$K$  является «порядком» наивысшей производной.

Значение скорости  $x'$  (т.е. первая производная координаты  $x$ ) определяется по аналогичной формуле, а ускорение  $x''$  – по формуле (3). Производные более высокого порядка  $x_0^{(k)}$  мы определяли путем непосредственного дифференцирования правых

частей уравнений (3) в аналитическом виде. Отметим, что в небесной механике методы, основанные на разложении Тейлора, применялись и ранее (см., например, [12, 13]).

В расчетах мы использовали числа с двойной точностью, при которой они выражаются 17-ю десятичными знаками. Вычисления показали, что в выражении (4) можно ограничиться производными шестого порядка, т.е. мы брали  $K=6$ . Вычисления на большие промежутки времени были реализованы на суперкомпьютерах RM-600 и МВС-1000 в Новосибирском ВЦ СО РАН. В программе предусмотрена возможность записи результатов «в файл» через определенное количество шагов, например, через каждые 10 тысяч лет. Для анализа параметров орбиты, по этим данным просчитывался один оборот планеты вокруг Солнца (см. [14]) и по результатам расчетов определялись угол наклона орбиты  $i$ , долгота восходящего узла  $\varphi_{\Omega}$ , эксцентриситет  $e$  и долгота перигелия  $\varphi_p$ . (см. рис. 1). Кроме того, вычислялись и другие параметры, в том числе: радиусы, долготы и моменты прохождения через перигелий и афелий, средний за один оборот момент количества движения и наибольшее отклонение точек орбиты от её средней плоскости.

Время счета положений небесных тел на интервале времени в 10000 лет с шагом  $dt = 1 \cdot 10^{-4}$  года на суперкомпьютере МВС-1000 с процессорами *DEC Alpha* и частотой 833 МГц составляет 65 минут, т.е. время счета одного шага интегрирования равно  $t_{1st} = 3.9 \cdot 10^{-5}$  сек, а решение задачи на интервале времени, равном 100 млн. лет, заняло 2 года. Для сравнения приведем время счета одного шага интегрирования в работе Ж.Ляскара [2] на суперкомпьютере *Compaq alpha workstation* с характеристиками (частота 833 МГц и  $t_{1st} = 8.64 \cdot 10^{-5}$  сек) и в работе Т. Куинна с соавторами [3] на суперкомпьютере *Silicon Graphics 4D-25 workstation* ( $t_{1st} = 3.74 \cdot 10^{-3}$  сек).

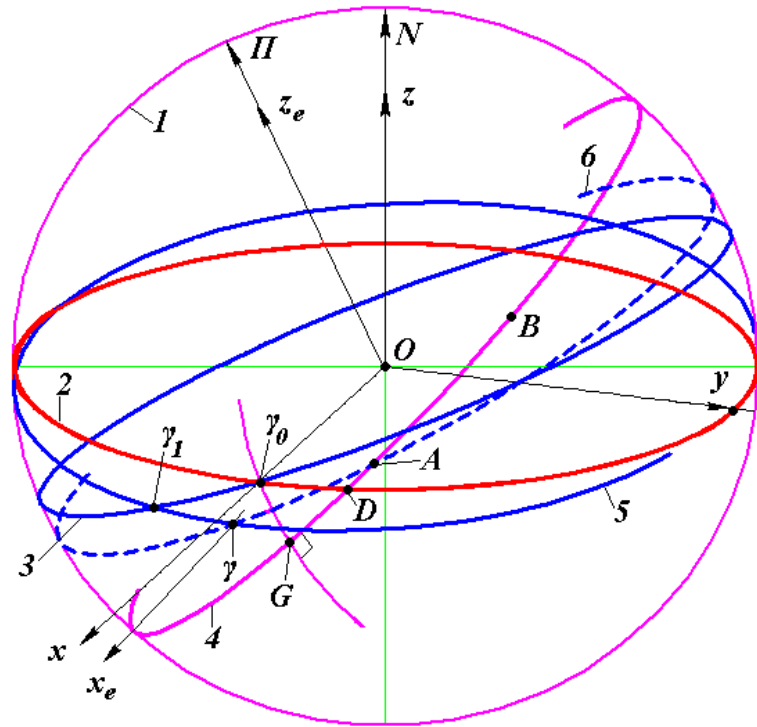
**1.5. Некоторые соображения о достоверности результатов.** Поскольку универсальные эффективные критерии оценки точности численных методов интегрирования неизвестны, мы использовали для этого разнообразные формы контроля (в Приложении 3 приведены некоторые исследования достоверности результатов, касающихся, прежде всего, списка основных использованных методов контроля достоверности решений, «смещения» тел «по» орбите и «на» орбите, сравнения численных результатов с эфемеридами).

Эффективным методом тестирования можно считать численное интегрирование дифференциальных уравнений осесимметричной задачи  $n$ -тел, точное аналитическое

решение которой изложено в работах [5, 15, 16]. Некоторые результаты и доказательства достоверности примененного нами метода описаны в наших работах [7, 14]. При шаге интегрирования  $dt = 1 \cdot 10^{-4}$  года относительная погрешность момента количества движения Солнечной Системы за 100 млн. лет составила  $\delta M = 8 \cdot 10^{-11}$ , что на много меньше погрешности момента количества движения Солнечной Системы, приведенной, приведенной в работе [3] и составившей в которой на интервале времени интегрирования в 3.056 млн. лет величину  $\delta M = 1.55 \cdot 10^{-7}$ . За этот же интервал времени погрешность наших расчетов для момента количества движения составила еще меньшую величину, равную  $\delta M = 3.93 \cdot 10^{-12}$ . Ниже мы покажем, что величину погрешности момента количества движения можно уменьшить даже до величины  $\delta M = 1.47 \cdot 10^{-15}$  за 100 млн. лет.

Рис. 1. Параметры орбиты Марса в неподвижной экваториальной  $x_0y_0z_0$  и подвижной эклиптической  $x_e y_e z_e$  гелиоцентрических системах координат.

1 – небесная сфера; 2 – плоскость экватора Земли на 1950 г.; 3 – плоскость орбиты Земли на 1950 г. (плоскость эклиптики); 4 – плоскость орбиты Марса в будущую эпоху  $T$ ; 5 – плоскость экватора Земли в эпоху  $T$ ; 6 – плоскость орбиты Земли в эпоху  $T$  (наклон для наглядности увеличен);  $N$  – северный полюс мира;  $\Pi$  – северный полюс подвижной эклиптики;  $\gamma_0$  – точка весеннего равноденствия 1950 г.;  $\gamma$  – точка на линии пересечения подвижного экватора в эпоху  $T$  с подвижной эклипстикой (точка весеннего равноденствия в эпоху



$T$ );  $\gamma_0 G$  – дуга большого круга, перпендикулярного плоскости орбиты Марса;  $B$  – гелиоцентрическая проекция перигелия Марса на небесной сфере;  $A$  – восходящий узел орбиты Марса на подвижной эклиптке;  $D$  – восходящий узел орбиты Марса на неподвижном экваторе 1950 г.; параметры орбиты Марса в инерциальной системе:  $\varphi_\Omega = \gamma_0 D$ ;  $\varphi_p = DB$ ;  $i = \angle \gamma_0 D G$ ; и в подвижной эклиптической системе:  $\Omega_a = \gamma A$ ;  $\omega_a = AB$ ;  $\pi_a = \gamma A + AB = \Omega_a + \omega_a$ ;  $i_{ea} = i_e = \angle \gamma A G$ ; индекс « $a$ » – по данным наблюдений.

## 2. Сравнение результатов вычислений с аппроксимацией данных наблюдений по Ньюкомбу



### 2.1. Приведение вычисленной долготы перигелия к неподвижной точке на орбите.

При сравнении результатов интегрирования уравнений (3) с наблюдениями возникает ряд трудностей, особенно если мы увеличиваем точность сравнения. Можно, например, сравнивать координаты тел, периоды их обращения вокруг Солнца, величины вековых возмущений. Сравнение положений тел, полученных в результате интегрирования в интервале времени, равном 50-ти годам, с эфемеридами DE406/LE406, указывает на их хорошее совпадение (см. табл. 4 из Приложения 3В). Под вековыми возмущениями мы понимаем законы изменения, прежде всего, угловых параметров орбит на интервале времени порядка одного тысячелетия. Так как вековые возмущения С. Ньюкомба, представленные им в виде «законов изменения» средних элементов эллиптической орбиты, определены на основании аппроксимации известных в астрономии наблюдений, то сравнение решений уравнений (3) с последними, позволяет убедиться в том, что они, вообще говоря, пригодны и на большем интервале времени.

Результаты наблюдений соотносятся к подвижной точке равноденствия, т.е. даны в подвижной системе координат, поэтому, для корректности, параметры наблюдений следует привести к неподвижной системе координат, так как угловые параметры орбиты, получаемые из решения уравнений (3), определяются в неподвижной системе координат. Если учесть, что положение перигелия зависит от эволюции плоскости орбиты, его долготу следует так же знать в неподвижной системе отсчета.

На рис. 1 показаны основные параметры орбиты Марса ( $i$ ,  $\varphi_p$  и  $\varphi_\Omega$ ), которые определяются в результате интегрирования уравнений (3). Так как долгота перигелия  $\varphi_p = DB$  отсчитывается от подвижного узла  $D$ , то при изменении углов, определяющих положение плоскости орбиты (то есть величин  $i$  и  $\varphi_\Omega$ ), точка  $D$  будет перемещаться вдоль линии  $DAB$  и тем самым будет «вносить вклад» в величину  $\varphi_p$ . К сожалению, невозможно зафиксировать некоторую неподвижную точку на орбите, отсчет от которой позволил бы определить чистое перемещение перигелия, не искаженное колебаниями самой орбиты. Только при совершении перигелием нескольких оборотов можно определить, более или менее точно, среднюю скорость его перемещения. Чтобы точнее «зафиксировать» мгновенное перемещение перигелия, можно, например,

выбрать «условно неподвижную» точку на орбите и пересчитать положение перигелия по отношению к ней. С этой целью, через восходящий узел орбиты Земли  $\gamma_0$  на неподвижном экваторе (см. рис. 1), проведем большой круг, перпендикулярный к орбите Марса. Обозначим точку их пересечения буквой  $G$ . Если положение плоскости орбиты планеты относительно вектора  $\vec{M}$  (момента количества движения всей Солнечной Системы) определять с помощью углов Эйлера (угол прецессии -  $\psi$  и угол нутации -  $\theta$ ), тогда эволюция плоскости орбиты планеты будет определяться прецессионным движением со скоростью  $\dot{\psi}$  вокруг вектора  $\vec{M}$  и колебаниями угла нутации  $\theta$  [17, 18]. Так как вектор  $\vec{M}$  близок к перпендикуляру, проведенному к плоскости орбиты Марса, то, при колебаниях орбиты  $GDAB$ , точка  $G$  будет иметь пренебрежимо малые смещения по орбите, что дает право отсчитывать от нее угловое расстояние перигелия  $\varphi_{p0}$ . Величина  $\varphi_{p0}$  состоит из двух дуг

$$\varphi_{p0} = GD + DB = GD + \varphi_p. \quad (7)$$

Найдем из прямоугольного треугольника  $\Delta\gamma_0GD$  дугу  $GD$ , если учесть, что дуга  $\gamma_0D = \varphi_\Omega$ , угол  $\angle\gamma_0GD = \pi/2$ , а угол  $\angle D = i$ . Из сферической астрономии (см., например, *Справочное руководство*, [8]) имеем, что

$$\sin\gamma_0G = \sin\gamma_0D \cdot \sin i, \quad (8)$$

$$\cos GD = \cos\gamma_0D / \cos\gamma_0G. \quad (9)$$

Из этих равенств можно получить, что угловое расстояние перигелия относительно неподвижной точки  $G$  равно

$$\varphi_{p0} = \varphi_p + \arccos\left(\frac{\cos\varphi_\Omega}{\sqrt{1 - (\sin\varphi_\Omega \cdot \sin i)^2}}\right). \quad (10)$$

## 2.2. Приведение данных наблюдений к неподвижной системе координат.

### 2.2.1 Параметры орбиты Марса в подвижной системе координат по данным наблюдений.

Традиционно наблюдения планет относят к системе координат, связанной с точкой весеннего равноденствия, т.е. с точкой пересечения на небесной сфере плоскостей эклиптики и экватора. Так как их положение в абсолютном пространстве изменяется со временем, то и системы координат являются подвижными. С другой стороны, дифференциальные уравнения движения тел написаны в неподвижной

(инерциальной) системе координат, поэтому их решения также «привязаны» к неподвижной системе координат. Для корректного сравнения решений уравнений с наблюдениями, очевидно, необходимо определить последние в неподвижной системе координат.

В работах *Ньюкомба* [21], опубликованных в 1895-1898 годах, приведены приближенные формулы для осредненных параметров орбиты Марса (эксцентриситета, долготы перигелия, долготы узла и наклона) в подвижной эклиптической системе координат, которые он получил на основе анализа и аппроксимации, имеющихся в его распоряжении, наблюдений:

$$e_a = 0.09331290 + 0.000092064 \cdot T_j - 0.000000077 \cdot T_j^2; \quad (11)$$

$$\pi_a = 334^\circ 13' 05''.53 + 6626''.73 \cdot T_j + 0''.4675 \cdot T_j^2 - 0''.0043 \cdot T_j^3; \quad (12)$$

$$\Omega_a = 48^\circ 47' 11''.19 + 2775''.57 \cdot T_j - 0''.005 \cdot T_j^2 - 0''.0192 \cdot T_j^3; \quad (13)$$

$$i_{ea} = 1^\circ 51' 01''.20 - 2''.430 \cdot T_j + 0''.0454 \cdot T_j^2; \quad (14)$$

где  $T_j$  – время, отсчитываемое в юлианских столетиях по 36525 «эфемеридных» суток от фундаментальной эпохи 1900, январь, 12<sup>h</sup> UT с номером юлианского дня  $JD_b = 2415020.3134$ . Индекс  $a$  означает, что коэффициенты в формулах получены в результате обработки наблюдений.

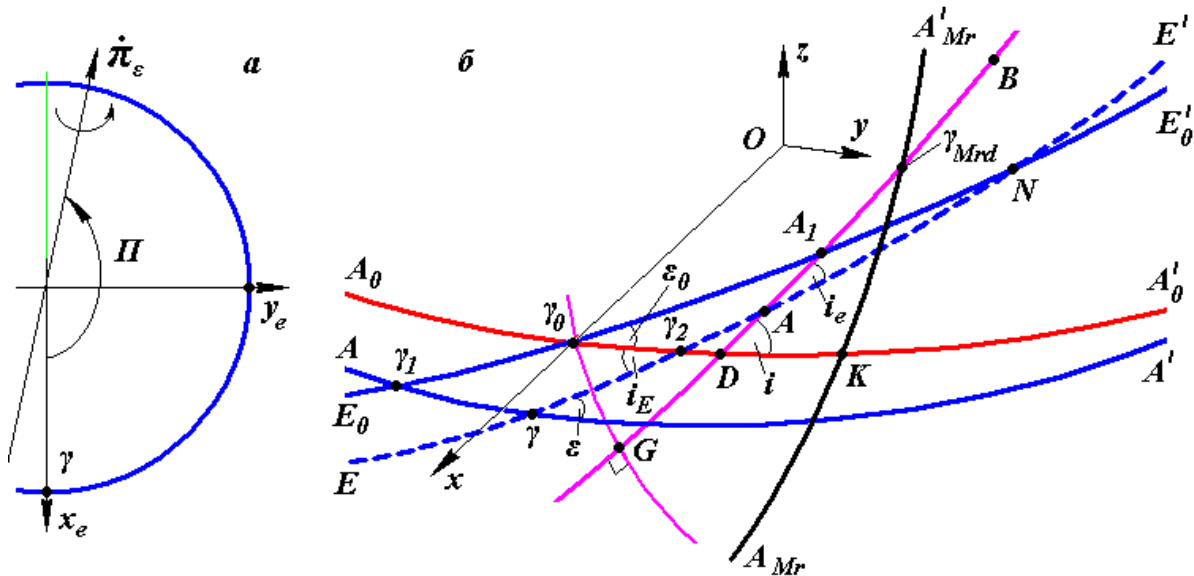


Рис. 2. Геометрические схемы:  $a$  – изображение в плоскости подвижной эклиптики;  $b$  – на небесной сфере. Другие обозначения даны на рис. 1. Символ  $A_{Mr}A_{Mr}'$  – плоскость экватора Марса в текущую эпоху.

Формулы (11) – (14) заимствованы из *Справочного руководства* [8], в которых учтены некоторых незначительных уточнений Росса. Долгота  $\Omega_a$  (см. рис. 1) также

отсчитывается в плоскости подвижной орбиты Земли от ее подвижного восходящего узла  $\gamma$ . Отметим, что  $\pi_a = \Omega_a + \omega_a$  является некоторой «условной» долготой перигелия, так как величины  $\Omega$ ,  $\omega$  определяются в разных плоскостях ( $\omega_a$  – угловое расстояние точки перигелия  $B$  в плоскости орбиты Марса от его восходящего узла  $A$ , а величина  $\Omega_a$  вычисляется в другой плоскости).

**2.2.2. Параметры орбиты Земли в неподвижной системе координат.** Так как элементы орбиты Марса отнесены к подвижной орбите Земли, сначала найдем их значения в неподвижной системе координат. Известно [8], что плоскость эклиптики «поворачивается» в своей плоскости (см. рис. 2 а) относительно мгновенной оси вращения, расположенной под углом  $\Pi$  к оси  $x_e$ ,

$$\Pi = 173^\circ 57' 03'' + 3287'' \cdot T_t + 0'',6 \cdot T_t^2, \quad (15)$$

с годичной скоростью

$$\frac{d\pi_\varepsilon}{dt} = 0'',47107 - 0'',00068 \cdot T_t, \quad (16)$$

где  $T_t$  – время в тропических столетиях по 36524.22 «эфemerидных» суток от фундаментальной эпохи с номером юлианского дня  $JD_b$ .

Если мы фиксируем ось  $x_e$  неподвижной системы координат в эпоху с номером юлианского дня  $JD_s$ , то проекция угловой скорости  $\frac{d\pi_\varepsilon}{dt} \cdot \cos \Pi$  на эту ось будет означать угловую скорость поворота эклиптики в неподвижной системе координат. Так как в неподвижной системе координат положение экватора  $A_0A_0'$  (см. рис. 2б), к которому подвижная эклиптика наклонена под углом  $i_{Ea}$ , известно, отсюда вытекает, что скорость изменения этого угла будет равна

$$\frac{di_{Ea}}{dt} = \frac{d\pi_\varepsilon}{dt} \cdot \cos \Pi. \quad (17)$$

Обозначим угол между эклиптикой и неподвижным экватором в неподвижной системе координат в эпоху  $JD$  через  $\varepsilon_s = \varepsilon_a(T_s)$ . Эта величина является начальным условием при интегрировании уравнения (17). Учтем при этом, что угол наклона подвижной эклиптики к подвижному экватору Земли определяется выражением

$$\varepsilon_a(T_j) = 23^\circ 27' 08'',26 - 46'',845 \cdot T_j - 0'',0059 \cdot T_j^2 + 0'',00181 \cdot T_j^3,$$

а величина  $T_S = (JD_S - JD_b)/36525$  представляет собой промежуток времени в юлианских столетиях от фундаментальной эпохи  $JD_b$  до эпохи  $JD_S$ .

Так как равенства (15) и (16) содержат время  $T$ , то оно входит в оба множителя соотношения (17). Используя среднее значение угла  $\Pi$  для среднего момента  $(T_S + T_j)/2$ , проинтегрируем уравнение (17), в результате чего получим:

$$i_{Ea} = \varepsilon_S + 100[0'',47107 \cdot (T_t - T_{St}) - 0'',00034 \cdot (T_t - T_{St})^2] \cdot \cos[173^\circ 57' 03'' + 3287'' \cdot 0.5 \cdot (T_{St} + T_t) + 0'',6 \cdot 0.25 \cdot (T_{St} + T_t)^2], \quad (18)$$

где  $\varepsilon_S$  - наклон эклиптики к экватору в эпоху  $T_S$ , а величины

$$T_{St} = T_S \cdot k_j, \quad k_j = 36525/36524.22.$$

Формула (18) определяет «закон» изменения наклона эклиптики по отношению к неподвижной, «фиксированной» на эпоху  $T_S$ , плоскости экватора плоскости экватора, согласно данным наблюдения.

В результате решения уравнений (3) мы получаем переменные значения параметров орбиты Земли и, в частности, закон изменения угла наклона  $i_E$  плоскости её орбиты к неподвижному экватору и движение восходящего узла  $\varphi_{\Omega E}$  по неподвижному экватору. Законы изменения наклонов  $i_E$  и  $i_{Ea}$  с высокой точностью совпадают, так как их относительная разность на интервале времени  $\pm 1000$  лет не превышает величины  $(i_E - i_{Ea})/i_{Ea} < 7 \cdot 10^{-5}$ .

Вывод зависимости восходящего узла эклиптики от вековых возмущений Ньюкомба относительно неподвижных координат затруднительно, поэтому целесообразно использовать полученное ранее в результате решения уравнений (3) выражение для перемещения восходящего узла орбиты Земли по неподвижному экватору  $\gamma_0 \gamma_2$  (см. рис. 2 б) в виде среднеквадратичной аппроксимации по параболе:

$$\gamma_0 \gamma_2 = a_\gamma T_n^2 + b_\gamma T_n + c_\gamma \quad \text{при} \quad -25 \leq T_n \leq 25. \quad (19)$$

Здесь  $T_n$  – используемое при численном интегрировании время в юлианских столетиях от начальной эпохи  $JD_0$ ,

$$a_\gamma = 2.397234912503438 \cdot 10^{-6}; \quad b_\gamma = 5.535655301401231 \cdot 10^{-5}; \quad c_\gamma = -2.089118512971404 \cdot 10^{-6}.$$

Приведенные выше численные значения коэффициентов получены на основе использования первого варианта начальных условий в системе координат 1950.0 г. Если же использовать второй вариант начальных условий (табл. 2), отнесенный к эпохе 2000.0 г., тогда получим следующие значения:

$$a_\gamma = 2.376361216684775 \cdot 10^{-6}; b_\gamma = 4.788549396485488 \cdot 10^{-5}; c_\gamma = -2.325022430798324 \cdot 10^{-5}.$$

Следует отметить, что перемещение восходящего узла орбиты Земли по неподвижному экватору  $\gamma_0\gamma_{2a}$  мы также получили, используя средние элементы орбиты Земли, приведенные к системе 2000.0 г., в теории движения планет, разработанной во Франции Симоном Дж.Л. и др. [20]. Отметим при этом, что величины дуг  $\gamma_0\gamma_2$  и  $\gamma_0\gamma_{2a}$  совпадают с высокой точностью в любой из моментов рассмотренного диапазона времени  $-25 \leq T_n \leq 25$ .

В результате прецессии земной оси восходящий узел  $\gamma$  (см. рис. 2 б) перемещается против движения Земли, по подвижной эклиптике  $EE'$ , с угловой скоростью, отнесенной к одному году (см. например, формулу из [ 8 ]),

$$p = 50'',25641 + 0'',02223 T_t. \quad (20)$$

Тогда в любой момент времени  $T$  смещение точки весеннего равноденствия по подвижной эклиптике относительно момента  $T_S$  будет определяться дугой  $\gamma\gamma_2$  (см. рис. 2 б), полученной в результате интегрирования равенства (20), в следующем виде:

$$\gamma\gamma_2 = 5025''.641 \cdot (T_t - T_{St}) + 2''.223 \cdot (T_t - T_{St})^2/2. \quad (21)$$

Для сравнения с результатами интегрирования уравнений (3) необходимо «время» в тропических столетиях  $T_t$  в зависимостях (18) и (21) заменить формулой:  $T_t = k_j [T_n + (JD_0 - JD_b)/36525]$ . Таким образом, наклон подвижной эклиптики к неподвижному экватору определяется выражением (18), перемещение ее восходящего узла – формулой (19), а положение подвижного экватора – равенством (21).

**2.2.3. Параметры орбиты Марса в неподвижной системе координат.** Долготы  $\Omega_a$  и  $\pi_a$  восходящего узла (точки  $D$  на рис. 2 б) и перигелия (точка  $B$ ) Марса, соответственно, отсчитываются от точки  $\gamma$ , поэтому на их величины влияет прецессия  $\gamma\gamma_2$  восходящего узла Земли. Аналогично, угол наклона плоскости орбиты Марса  $i_{ea}$  зависит от изменения угла наклона орбиты Земли  $i_{Ea}$ , поэтому целесообразно вычислить вековые возмущения орбиты Марса относительно неподвижной плоскости экватора 1950.0 г.  $A_0A_0'$  (см. рис. 2 б) как функции от следующих параметров: 1) углового расстояния восходящего узла  $\varphi_{\Omega^a} = \gamma_0 D$ , отсчитываемого в плоскости экватора 1950 г. от восходящего узла Земли  $\gamma_0$ ; 2)  $\varphi_{p0^a} = GB$  - углового положения перигелия, отсчитываемого в плоскости орбиты Марса от неподвижной точки  $G$ ; 3) угла наклона  $i^a = \angle \gamma_0 DG$  плоскости орбиты к неподвижной плоскости экватора.

Из рис. 2 б видно, что в неподвижных координатах угловое положение перигелия в плоскости его орбиты определяется дугами  $GD$ ,  $DA$  и  $AB$ :

$$\varphi_{p0}^{\alpha} = GD + DA + AB. \quad (22)$$

Для определения этих дуг рассмотрим сферический треугольник  $\Delta\gamma_2DA$ , в котором известны два угла:  $\gamma_2 = i_{Ea}$ ,  $A = i_{ea}$ , и сторона  $\gamma_2A = \Omega_a - \gamma\gamma_2$ , лежащая против неизвестного угла  $D$ . Его можно определить по «теореме косинусов» (формула (1.1.010) из [8]):

$$\cos D = -\cos i_{Ea} \cdot \cos i_{ea} + \sin i_{Ea} \cdot \sin i_{ea} \cdot \cos(\Omega_a - \gamma\gamma_2). \quad (23)$$

Так как угол наклона орбиты к плоскости неподвижного экватора  $i^{\alpha} = \pi - D$ , то тогда из (23) получаем его значение в виде:

$$i^{\alpha} = \pi - \arccos(-\cos i_{Ea} \cdot \cos i_{ea} + \sin i_{Ea} \cdot \sin i_{ea} \cdot \cos(\Omega_a - \gamma\gamma_2)). \quad (24)$$

Далее, из треугольника  $\Delta\gamma_2DA$ , по теореме синусов (см. формулу (1.1.007), [8]) находим величину дуги  $\gamma_2D$  и положение восходящего узла в виде формул:

$$\varphi_{\Omega}^{\alpha} = \gamma_0 D = \gamma_0 \gamma_2 + \gamma_2 D = \gamma_0 \gamma_2 + \arcsin[\sin(\Omega_a - \gamma\gamma_2) \sin i_{Ea} / \sin i^{\alpha}]. \quad (25)$$

Для определения положения перигелия на орбите относительно неподвижной точки  $G$  (см. рис. 2 б), согласно (22), найдём аналогично дугу  $DA$  из  $\Delta\gamma_2DA$ :

$$\sin i_{Ea} / \sin DA = \sin(\pi - i^{\alpha}) / \sin \gamma_2 A.$$

Из этого вытекает, что дуга

$$DA = \arcsin[\sin i_{Ea} \cdot \sin(\Omega_a - \gamma\gamma_2) / \sin i^{\alpha}]. \quad (26)$$

Дуга  $AB$ , фигурирующая в выражении (22), определяется по формуле

$$AB = \omega = \pi_a - \Omega_a. \quad (27)$$

Из прямоугольного сферического треугольника  $\Delta\gamma_0GD$ , в котором известны дуга  $\gamma_0 D = \varphi_{\Omega}^{\alpha}$  и угол  $\angle D = i^{\alpha}$ , определяем дугу  $\gamma_0 G$  согласно формуле

$$\sin \gamma_0 G = \sin \gamma_0 D \sin i^{\alpha}; \quad \cos GD = \cos \gamma_0 D / \cos \gamma_0 G,$$

и далее, определяем дугу

$$GD = \arccos\{\cos \varphi_{\Omega}^{\alpha} / [1 - (\sin \varphi_{\Omega}^{\alpha} \cdot \sin i^{\alpha})^2]^{0.5}\}. \quad (28)$$

После подстановки значений дуг  $DA$ ,  $AB$ , и  $GD$  в соотношение (22), получаем угловое расстояние перигелия Марса в неподвижных координатах, которое отсчитывается от неподвижной точки  $G$  на его орбите, в следующем виде:

$$\varphi_{p0}^{\alpha} = \pi_a - \Omega_a + \arcsin[\sin i_{Ea} \sin(\Omega_a - \gamma\gamma_2) / \sin i^{\alpha}] + \arccos[\cos \varphi_{\Omega}^{\alpha} / (1 - (\sin \varphi_{\Omega} \sin i^{\alpha})^2)^{0.5}].$$

(29)

Таким образом, используя наблюдения, можно вычислить наклон орбиты Марса к неподвижной плоскости экватора  $i^a$ , долготу восходящего узла  $\varphi_{\Omega}^a$  с помощью соотношений (24) и (25), соответственно, и угловое расстояние перигелия  $\varphi_{p0}^a$  от неподвижной точки  $G$  на орбите Марса с помощью соотношения (29).

**2.3. Сравнение вычисленных вековых возмущений элементов орбиты Марса со значениями, полученными из наблюдений.** Для этого мы проинтегрировали дифференциальные уравнения (3) с использованием, приведенных выше, двух вариантов начальных условий на интервалах времени:  $-2.6 \text{ тыс. лет} \leq T \leq 2 \text{ тыс. лет}$  для первого варианта и  $-3.4 \text{ тыс. лет} \leq T \leq 3.6 \text{ тыс. лет}$  - для второго. Мы решали эти задачи с шагом интегрирования  $dt = 1 \cdot 10^{-5}$  года и с «расширенной длиной» чисел (с четырех кратной точностью), при которой вычисляемые координаты представляются числами с 35-ю десятичными знаками. Вычисления показали, что погрешность в этом случае пропорциональна [8] интервалу времени интегрирования и изменяется со скоростью, примерно равной  $d\delta M/dt = 1.47 \cdot 10^{-21}$  в столетие. Вычисления с заданными начальными условиями и параметрами на интервале времени в 100 млн. лет, привели бы к относительной погрешности, примерно равной,  $\delta M = 1.47 \cdot 10^{-15}$ , что значительно меньше, приведенной нами ранее, величины  $\delta M = 8 \cdot 10^{-11}$ . Не смотря на то, что погрешность уменьшилась в 54000 раз, результаты вычислений, по сравнению с результатами интегрирования «с двойной точностью» и с шагом интегрирования  $dt = 1 \cdot 10^{-4}$  года, практически совпали. Это соображение говорит в пользу достоверности проведенных вычислений.

На рис. 3 точками представлена динамика параметров орбиты Марса: эксцентриситета  $e$ , долготы восходящего узла  $\varphi_{\Omega}$ , угла наклона плоскости орбиты  $i$  и угла положения перигелия  $\varphi_{p0}$  в системе неподвижного экватора, вычисленная методом численного интегрирования системы (3), описывающей взаимодействия одиннадцати тел Солнечной Системы. Непрерывные линии представляют те же величины ( $e_a, i^a, \varphi_{\Omega}^a$  и  $\varphi_{p0}^a$ ), полученные из наблюдений в промежутке времени, порядка 2500 лет, после некоторой математической обработки. По этой причине их достоверность ограничена этим периодом времени. Из графиков видно, что результаты наблюдений хорошо согласуются с вычисленными из дифференциальных уравнений значениями элементов



$e$ ,  $i$ ,  $\varphi_{\Omega}$  и  $\varphi_p$  в пределах нескольких тысяч лет «в прошлое» и «в будущее» от исходной эпохи. Наибольшее отклонение имеет наклон  $i$  при  $T = -2.6$  тыс. лет с относительной погрешностью  $(i - i^a)/i^a = 7.4 \cdot 10^{-4}$ .

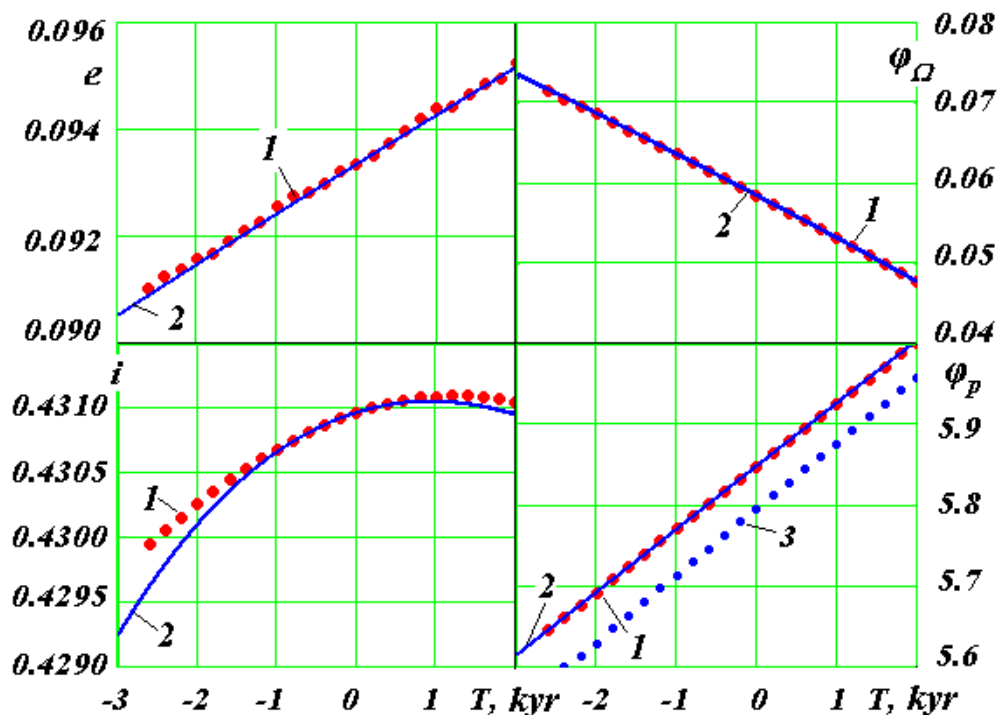


Рис. 3. Сопоставление рассчитанной (1) эволюции орбиты Марса за  $-2.6 \div +2$  тыс. лет с аппроксимацией С. Ньюкомба данных наблюдений (2):  $e$  – эксцентриситет;  $i$  – наклон плоскости орбиты к плоскости экватора 1950.0 г. в радианах;  $\varphi_{\Omega}$  – угловое положение восходящего узла орбиты от оси  $x$  на эпоху 1950.0 г. в радианах; угловое положение перигелия в плоскости орбиты:  $\varphi_{p0}$  – от неподвижной точки  $G$  на орбите (1, 2) и  $\varphi_p$  – от восходящего узла в радианах (3).  $T$  – время в тысячах юлианских лет от 30.12.1949 г.; интервал между точками – 200 лет.

Близость результатов «теоретических» вычислений с данными наблюдений, представленных «эмпирическими» соотношениями, свидетельствует в пользу достоверности наших расчетов. Анализ также показывает, что при изучении эволюции орбиты Марса в течение 300 непрерывных оборотов, появляются небольшие короткопериодические колебания в элементах орбиты и, прежде всего, в эксцентриситете орбиты Марса, период которых равен двенадцати годам. Эти колебания показаны на рис. 3.

На рис. 3 представлены результаты вычислений с использованием первого варианта начальных условий (согласно табл.1), отнесенных к эпохе 1950.0 г. Такие же вычисления были нами выполнены и со вторым вариантом начальных условий (согласно табл.2), но отнесенных к эпохе 2000.0 г. Их результаты еще ближе к

«эмпирическим» соотношениям. Эти сравнения убеждают нас в справедливости, приведенных выше, количественных и качественных выводов.

### 3. Эволюция орбиты Марса в интервале времени 3 млн. лет

Эволюция вычисленных элементов орбиты Марса за 3 млн. лет «в прошлое» представлена на рис. 4. Она показывает, что эксцентриситет орбиты  $e$  испытывает короткопериодические изменения с амплитудой 0.019, с «главным» периодом, равным  $T_{e1} = 95.2$  тыс. лет при среднем (за 50 млн. лет) значении  $e_m = 0.066$ . Долгота восходящего узла  $\varphi_{\Omega}$  меняется с «средним» периодом  $T_{\Omega} = 73.1$  тыс. лет вокруг среднего значения  $\varphi_{\Omega m} = 0.068$  радиан. Угол наклона плоскости орбиты  $i$  к плоскости экватора (эпоха 1950 г.) испытывает колебания с таким же периодом  $T_i = 73.1$  тыс. лет вокруг среднего значения  $i_m = 0.405$  радиан. Долгота перигелия  $\varphi_p$  практически линейно увеличивается со временем, т.е. перигелий перемещается в направлении обращения Марса вокруг Солнца, совершая в среднем один оборот за  $T_p = 76.8$  тыс. лет. Угловая скорость  $\omega_p$  вращения перигелия колеблется вокруг среднего значения  $\omega_{pm} = 1687''$  за столетие, при этом в момент времени  $t = -1.35$  млн. лет она принимает отрицательное значение.

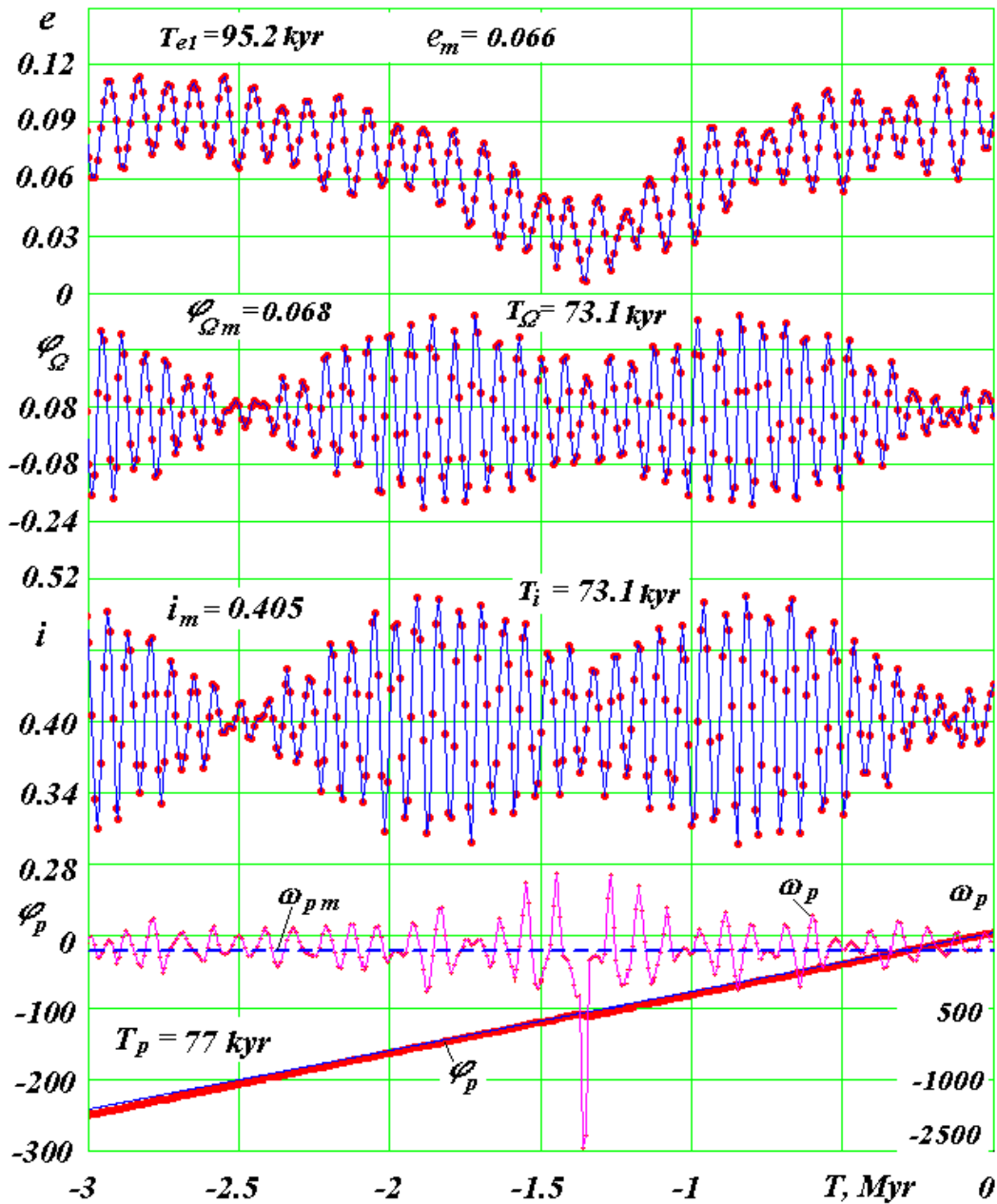


Рис. 4. Эволюция орбиты Марса за 3 млн. лет: обозначения те же, что и на рис. 3;  $T$  – время в миллионах лет; интервал между соседними точками равен 10 тыс. лет;  $\omega_p$  – угловая скорость вращения перигелия в  $''$ /столетие на интервале времени в 20 тыс. лет; средняя за 50 млн. лет угловая скорость вращения перигелия  $\omega_{pm} = 1687''$ /столетие – средняя за 50 млн. лет.

#### 4. Эволюция орбиты Марса за 100 млн. лет.

На рис. 5а представлено изменение параметров орбиты Марса за 50 млн. лет. На нем отчетливо виден второй период изменения эксцентриситета, равный  $T_{e2} = 2.31$  млн. лет.

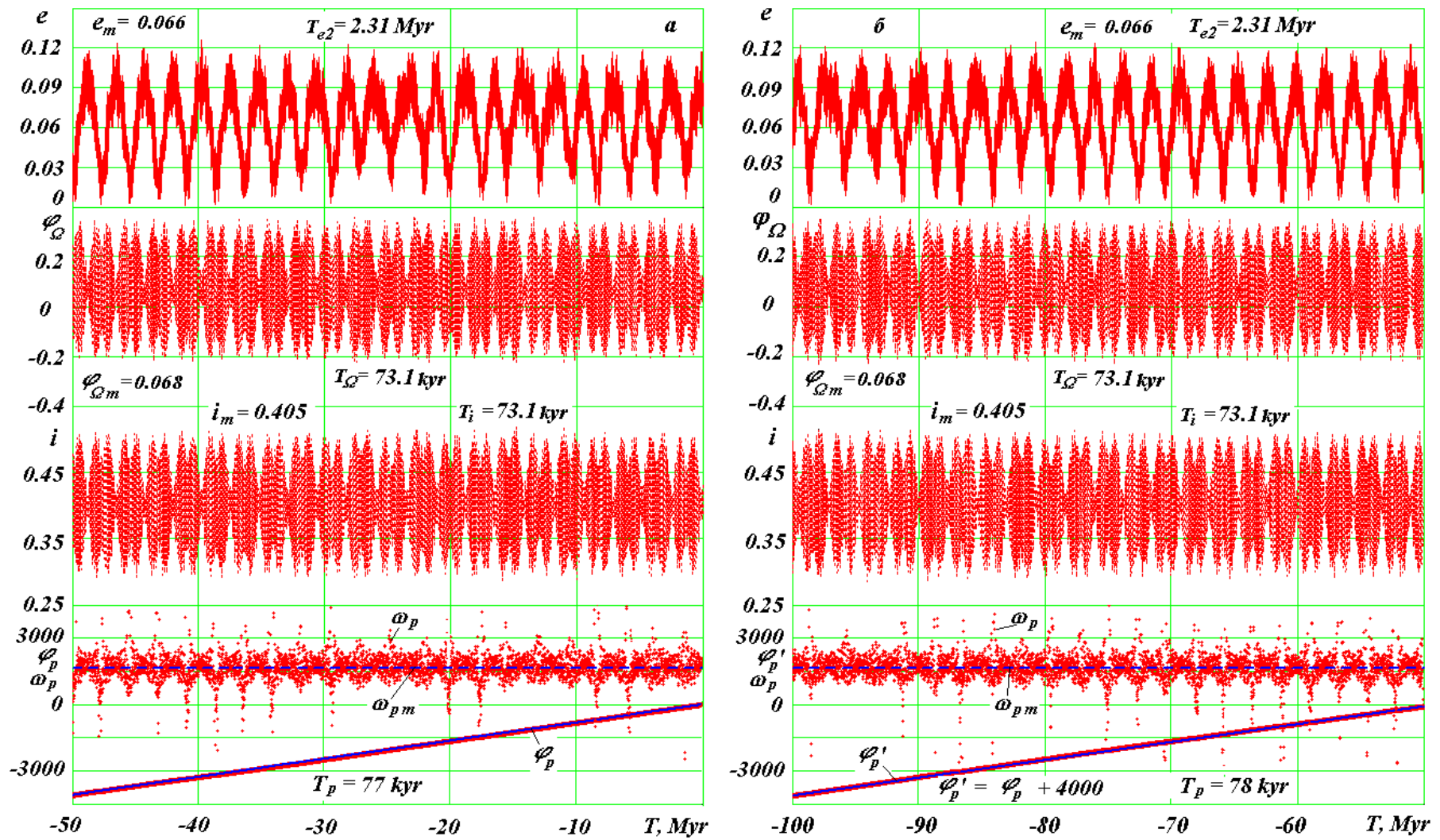


Рис. 5. Эволюция орбиты Марса за 100 млн. лет (обозначения те же, что и на рис. 3 – 4).

При этих колебаниях достигаются «крайние» значения эксцентриситета  $e = 0.0014$  и  $e = 0.126$ . Колебания угла наклона  $i$  происходят в пределах от  $0.288$  до  $0.521$  радиан, их диапазон составляет  $13.37^\circ$ . Долгопериодические колебания восходящего узла  $\varphi_\Omega$  и наклона орбиты  $i$  обусловлены колебаниями ее угла нутации  $\theta$  со средним периодом, равным  $T_\theta = 1.15$  млн. лет. Следует отметить, что период  $T_\theta$  в два раза меньше  $T_{e2}$ . Перигелий со средним за 50 млн. лет периодом  $T_p$  перемещается в направлении обращения Марса вокруг Солнца. Угловая скорость  $\omega_p$  вращения перигелия колеблется вокруг среднего значения  $\omega_{pm}$ . При сопоставлении с графиком для  $e$  видно, что возвратные движения перигелия происходят, когда эксцентриситет орбиты приближается к нулю. Из представленных графиков следует, что амплитуды колебаний и периоды стабильны, т.е. орбита Марса совершает «стационарные» движения.

На рис. 5б показано изменение параметров орбиты Марса в диапазоне времени - 50 млн. лет  $\leq T \leq -100$  млн. лет. Из сравнения графиков, на рисунках 5а и 5б, видно, что характер эволюции параметров орбиты в течение двух периодов времени по 50 миллионов лет каждый сохраняется. Периоды колебаний эксцентриситета  $e$ , восходящего узла орбиты  $\varphi_\Omega$  и угла наклона её плоскости  $i$  к плоскости неподвижного экватора, а также их амплитуды и период  $T_p$  обращения перигелия остаются теми же. Аналогичные результаты получены для орбит других планет на том же промежутке времени в 100 млн. лет. Это свидетельствует об устойчивом характере планетных движений в Солнечной Системе.

### **5. Сравнение наших результатов с результатами других исследователей.**

В 1950 г. Д. Брауэр и А. Вурком опубликовали новую аналитическую теорию вековых возмущений элементов орбит планет Солнечной Системы [21]. На ее основе К. Остервинтер и др. [22] вычислили изменения элементов орбит больших планет, от Меркурия до Нептуна, за период времени  $-5$  млн. лет  $\leq T \leq 5$  млн. лет. В этой работе приведены, в частности, углы наклона плоскости орбиты к неподвижной эклиптике  $\gamma_1\gamma_0A_1$  (см. рис. 2б). Для сравнения с ними мы определили значения наклонов планетных орбит к плоскости неподвижной эклиптики по значениям рассчитанных нами наклонов к плоскости неподвижного экватора. С этой целью мы рассмотрели треугольник  $\Delta\gamma_0DA_1$ , в котором известны два угла  $\angle\gamma_0 = \varepsilon_0$  и  $\angle\gamma_0DA_1 = \pi - i$ , сторона между ними  $\gamma_0D = \varphi_\Omega$ . И на основе сферической тригонометрии вычислили другие его

параметры Угол наклона орбиты  $i_{e0} = \angle \gamma_0 A_1 D$  к неподвижной эклиптике может быть вычислен по «теореме косинусов» [8] и будет равен

$$i_{e0} = \arccos[-\cos \varepsilon_0 \cos(\pi - i) + \sin \varepsilon_0 \sin(\pi - i) \cos \varphi_{\Omega}]. \quad (30)$$

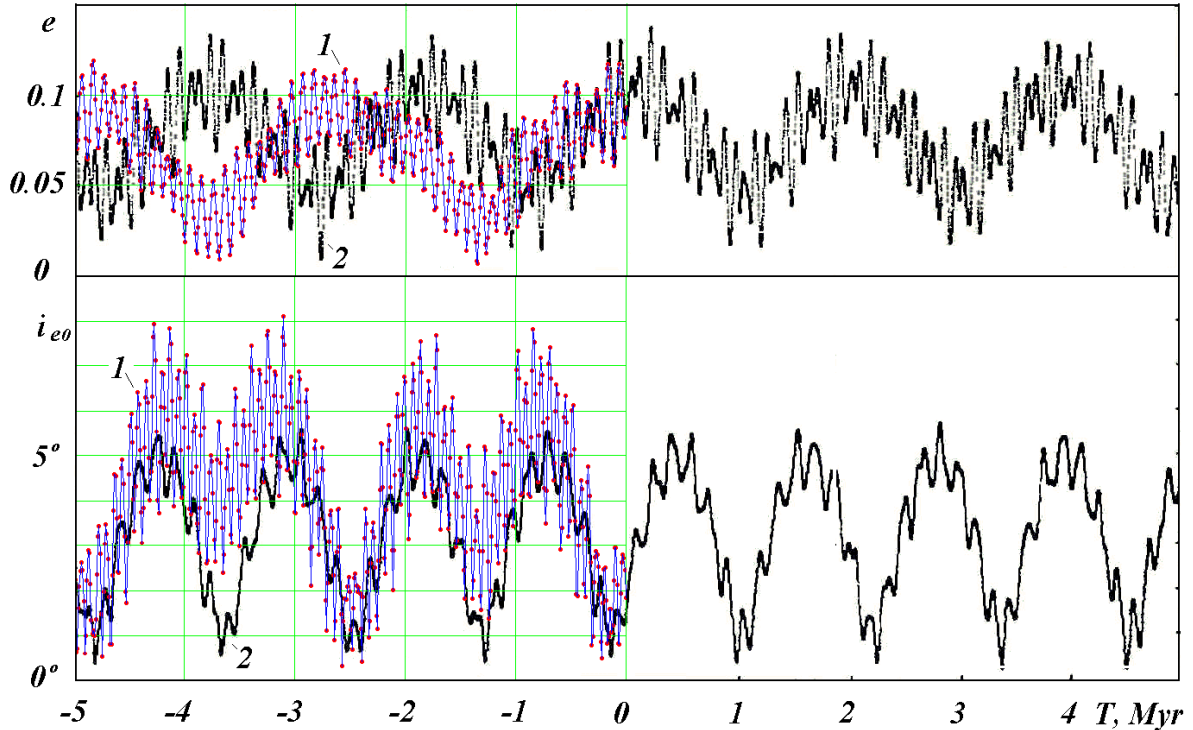


Рис. 6. Сравнение численных решений (1) эксцентриситета и наклона орбиты Марса в промежутке времени, равном 5-ти миллионам лет (от -5 млн. лет до «сегодняшнего дня»,  $T=0$ ) с расчетами (2) К. Остервинтера и др. [22], полученных ими на основании теории Брауэра и Вуркома [21].

Из этого сравнения видно, что значения эксцентриситетов  $e$  в начале (при  $T=0$ ) совпадают количественно, затем («после» -1 млн. лет) начинают различаться качественно из-за того, что второй период изменения эксцентриситета  $T_{e2} = 2$  млн. лет меньше найденного нами периода ( $T_{e2} = 2.31$  млн. лет), который, как будет показано на рис. 7, совпадает с периодом колебаний Ж.Ляскара и др. [4]. Это говорит о том, что в работе [22] долгопериодические изменения эксцентриситета вычислены, по-видимому, с большой погрешностью. Что касается углов наклона, наши результаты и результаты, приведенные в работе [22], фактически совпадают. В статье [25] период больших колебаний наклона  $i_{e0}$  равен,  $T_{ie2} = 1.166$  млн. лет, т.е. близок к «нашему периоду колебаний»,  $T_{\theta} = 1.15$  млн. лет, для угла нутации  $\theta$ . Однако периоды коротких колебаний, приведенные в статье [22], в два с лишним раза больше вычисленных нами периодов колебаний и периодов колебаний, приведенных в работе [4] (см. рис. 7).

Короткопериодические колебания углов наклона, приведенные в работе [22], по-видимому, вычислены с большей погрешностью. Однако, в отличие от работы [4], эволюция колебаний плоскости орбиты Марса, описанная в статье [22] так же, как и у нас, имеет устойчивый характер.

В работе [4] долгота перигелия  $\pi_L$  отсчитывается от подвижного восходящего узла (moving equinox), а угол наклона  $I_{Mr}$  плоскости орбиты (obliquity) отнесен к подвижной плоскости экватора Марса. Для дальнейшего необходимо привести эти результаты к неподвижному земному экватору и с этой целью выполним некоторые геометрические построения.

Восходящий узел находится на пересечении кругов обиты Марса  $DAB$  и его экватора  $A_{Mr} A'_{Mr}$  (см. рис. 2б). Восходящий узел  $\gamma_{Mra}$  расположен на другом конце диаметра от нисходящего узла  $\gamma_{Mrd}$ , показанного на этом рисунке. Поэтому долгота перигелия  $\pi_L$  определяется дугой  $\gamma_{Mra}D\gamma_{Mrd}B$ , которую можно записать в виде суммы дуг:

$$\pi_L = \gamma_{Mra}D\gamma_{Mrd} + \gamma_{Mrd}B = \pi + \gamma_{Mrd}B = \pi + \varphi_{pL} - D\gamma_{Mrd}, \quad (31)$$

где  $\varphi_{pL} = DB$  – долгота перигелия от «опорного» земного экватора  $A_0A'_0$ , поэтому долгота перигелия от неподвижного земного экватора запишется в виде [4]:

$$\varphi_{pL} = \pi_L + D\gamma_{Mrd} - \pi + 2\pi, \quad (32)$$

где величина  $2\pi$  добавлена для преобразования отрицательного угла долготы перигелия в начальную эпоху (так как  $\pi_L(0) = 1.24$ ,  $D\gamma_{Mrd}(0) = 1.42$ ) в положительный угол.

Дуга  $D\gamma_{Mrd}$  изменяется за счет прецессии марсианского экватора, принятой в статье [4] равной  $p_{Mr} = 7.597''/\text{год}$ . Прецессия происходит «за стрелкой часов», т.е. точка  $\gamma_{Mrd}$  приближается к точке  $D$  со скоростью  $p_{Mr}$ . Если обозначить положение нисходящего узла в начальную эпоху через  $\gamma_{0Mrd}$ , тогда смещение  $\gamma_{Mrd}$  по орбите Марса в радианах запишется в следующем виде:

$$\gamma_{0Mrd}\gamma_{Mrd} = -100 \cdot 2 \cdot \pi p_{Mr} \cdot T_j / (3600 \cdot 360), \quad (33)$$

где  $T_j$  – время в юлианских столетиях от начальной эпохи. Тогда дуга  $D\gamma_{Mrd}$  в любой момент времени выражается в виде суммы двух дуг:

$$D\gamma_{Mrd} = D\gamma_{0Mrd} + \gamma_{0Mrd}\gamma_{Mrd}, \quad (34)$$

где  $D\gamma_{0Mrd}$  – величина этой дуги в начальную эпоху.

Для определения дуги  $D\gamma_{0Mrd}$  воспользуемся средними экваториальными (земными) координатами северного полюса  $N_{Mr}$  Марса, взятыми из Справочника [8], стр. 65]:

$$\alpha_{NM_r} = 317^\circ.32 - 0^\circ.1011T_t; \quad \delta_{NM_r} = 52^\circ.68 - 0^\circ.0570T_t \quad (35)$$

и угол наклона экватора Марса к плоскости его орбиты

$$I_{Mr}^a = 25^\circ.19969 + 0^\circ.01219T_j + 0^\circ.00006T_j^2, \quad (36)$$

где  $T_t$  и  $T_j$  время в тропических и юлианских столетиях от начальной эпохи 1950.0

В треугольнике  $DK\gamma_{Mrd}$  с помощью параметров (35) – (36) мы определяем два угла  $\angle K = \delta_{NM_r} + \pi/2$  и  $\angle \gamma_{Mrd} = I_{Mr}^a$ , а также величину

$$DK = \alpha_{NM_r} + \pi/2 - \varphi_{\Omega}^a, \quad (37)$$

где величина  $\varphi_{\Omega}^a$  определяется из выражения (25).

Используя основные теоремы сферической астрономии (например, соотношение  $\sin D\gamma_{Mrd}^a / \sin K = \sin DK / \sin \gamma_{Mrd}$ ), находим величину дуги

$$D\gamma_{Mrd}^a = \arcsin[\sin(\pi/2 + \delta_{NM_r}) \cdot \sin(\alpha_{NM_r} - \varphi_{\Omega}^a + \pi/2) / \sin(I_{Mr})]. \quad (38)$$

Индекс «a» означает, что дуга определена по данным наблюдений. После подстановки (34) в (32) угловое расстояние перигелия Марса от неподвижного земного экватора в работе [4] запишется в виде:

$$\varphi_{pL} = \pi_L + D\gamma_{0Mrd} + \gamma_{0Mrd} \gamma_{Mrd} + \pi, \quad (39)$$

где дуга  $D\gamma_{0Mrd}$  определяется из выражения (38) в начальную эпоху, т.е. при  $T_t = T_j = 0$ .

С помощью угла  $I_{Mr} = \angle D\gamma_{Mrd}K$  из работы [4], определим величину угла  $i_L = \angle \gamma_{Mrd}DK$  (угол между орбитой Марса и неподвижной плоскостью земного экватора  $A_0A'_0$  (см. рис. 2б)). В треугольнике  $DK\gamma_{Mrd}$  известны два угла: угол  $I_{Mr}$  и из наблюдений угол  $\angle K = \pi - \pi/2 + \delta_{NM_r}$ . Из наблюдений известны также две стороны:  $D\gamma_{Mrd}$  и  $DK$ , соответственно (см. соотношения (34) и (37)). Неизвестный угол  $i_L$  находится против неизвестной стороны  $K\gamma_{Mrd}$ . Применяя «теорему косинусов» [8] к величине угла  $i_L$  и стороны  $K\gamma_{Mrd}$ , после «исключения стороны» из двух равенств получаем формулу:

$$i_L = \arccos\{[\sin I_{Mr} \cdot \cos(\delta_{NM_r}) \cdot \cos(DK) \cdot \cos(D\gamma_{Mrd}^a) + \cos I_{Mr} \cdot \sin(\delta_{NM_r})] / [1 - \sin I_{Mr} \cdot \cos(\delta_{NM_r}) \cdot \sin(DK) \cdot \sin(D\gamma_{Mrd}^a)]\}. \quad (40)$$

Входящие в выражение (40) приближенные представления для наблюдений (соотношения (13), (14), (24), (25), (35) и др.) справедливы на интервале времени порядка 1000 лет, поэтому формула (40) пригодна тоже на таком интервале.



Результаты, полученные нами и относящиеся к эволюции орбиты Марса на промежутке времени в 3 млн. лет, мы сравнили (см. рис. 7) с результатами, приведенными в работе [4]. Величины эксцентриситетов  $e$  совпадают с высокой точностью практически на всем этом интервале времени, поэтому можно, с большой вероятностью, допустить, что в вычислениях, приведенных в работе [22] и касающихся определения эксцентриситета, по-видимому, имеются погрешности.

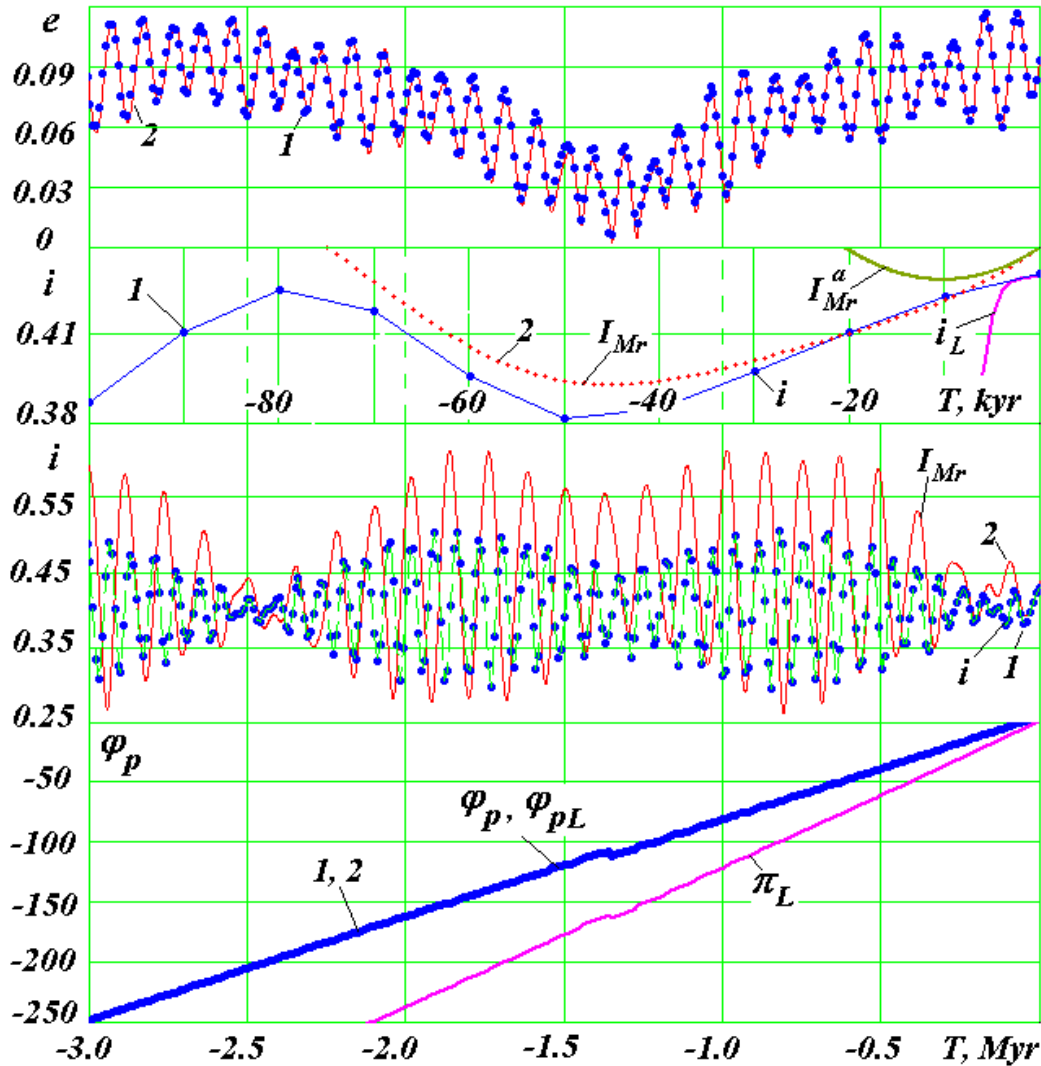


Рис. 7. Сравнение численных решений (1) эволюции орбиты Марса на интервале времени (-3 млн. лет – 0) с расчетами (2) из работы [4] для эксцентриситета ( $e$ ), угла наклона плоскости орбиты ( $i$ ) к плоскости экватора (эпоха 1950 г.) и углового расстояния перигелия от неподвижного экватора ( $\varphi_p$ );  $I_{Mr}$  и  $\pi_L$  – наклон орбиты и долгота перигелия в подвижных марсианских координатах;  $I_{Mr}^a$  вычислялась по данным наблюдений с помощью (36); величина  $i_L$  – по данным Ж.Ляскара [4], вычисленным по формуле (40).

На рис. 7 мы сравнили значения угла наклона в двух интервалах времени: от 0 до – 100 тыс. лет и от 0 до –3 млн. лет. Из верхнего графика на рис. 7 видно, что на протяжении трех тысяч лет углы наклона орбиты Марса к подвижному экватору Марса

совпадают с «наблюдаемыми» углами  $I_{Mr}^a$ . Это подтверждает справедливость выбора авторами статьи [4] начальных условий и корректность первых шагов интегрирования. Преобразованный угол  $i_L$  к плоскости неподвижного земного экватора также на протяжении 3-х тысяч лет совпадает с вычисленным нами углом  $i$ . Так как наши результаты совпадают с «наблюдениями» (см. рис. 3), это подтверждает правильность преобразования (40). Выражение (40) вне интервала аппроксимации не может быть использовано, поэтому на втором интервале времени мы сравнивали углы наклона  $i$  и  $I_{Mr}$ .

Вычисленные нами углы наклона плоскости орбиты  $i$  к неподвижной плоскости экватора качественно совпадают с углами, приведенными в статье [4] в «начальном» интервале времени (от 0 до 60 тыс. лет). Затем амплитуды углов  $I_{Mr}$ , приведенные в [4], после 400 тыс. лет резко возрастают. Так как амплитуды колебаний наших углов наклона к плоскости орбиты  $i_e$  согласуются с амплитудами углов из работы К. Остервинтера и др. [22], (см. рис. 6), отсюда следует, что увеличение углов  $I_{Mr}$ , приведенное в работе [4], обусловлено изменением угла наклона плоскости экватора Марса. Мы отмечали, что вычисленный нами период колебаний  $T_\theta = 1.15$  млн. лет угла нутации  $\theta$  плоскости орбиты Марса близок к периодам, приведенным в статье [4] и, можно сказать, что фактически совпадает (см. рис. 8) с периодами модуляции амплитуд углов  $I_{Mr}$  из работы [4]. Из этого можно заключить, что периоды изменения наклона орбиты Марса, приведенные в работе [4], вычислены корректно.

На рис. 7 сопоставлена динамика вычисленных нами угла перигелия  $\varphi_p$  и углов  $\varphi_{pL}$  из работы [4] по формуле (32). Так как у названных авторов, независимо от количества оборотов перигелия углы  $\pi_L$  изменяются от 0 до  $2\pi$ , мы их привели к некоторому непрерывному углу. Видно, что эти углы практически совпадают на рассматриваемом интервале времени в 3 млн. лет. Совпадают также «возвратные» движения перигелия, которые имеют место при  $T = -1.35$  млн. лет. На графиках также приведены значения долготы перигелия  $\pi_L$  относительно подвижного марсианского экватора.

Сравнение полученных нами результатов с результатами из работы [4], относящиеся к эволюции орбиты Марса за 21 млн. лет, приведено на рис. 8. Значения эксцентриситетов  $e$  качественно совпадают на всем этом интервале, т.е. совпадают периоды и амплитуды как короткопериодических, так и долгопериодических колебаний (см. рис. 7). Из этого вытекает, что теория, изложенная в статьях [1, 2, 4],

позволяет с хорошей точностью вычислить эксцентриситет орбиты Марса. Амплитуда угла наклона  $I_{Mr}$  плоскости орбиты Марса к плоскости подвижного экватора Марса, начиная с -5 млн. лет, значительно возросла, т.е. произошло качественно новое изменение положения орбиты Марса относительно его подвижного экватора. Из графиков эволюции перигелиев Марса за период в 21 млн. лет (см. рис. 8, где представлены угловые положения перигелия  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pL}$ ) можно заключить, что наши численные исследования практически совпадают с результатами Ж.Ляскара и его соавторов [1,2,4].

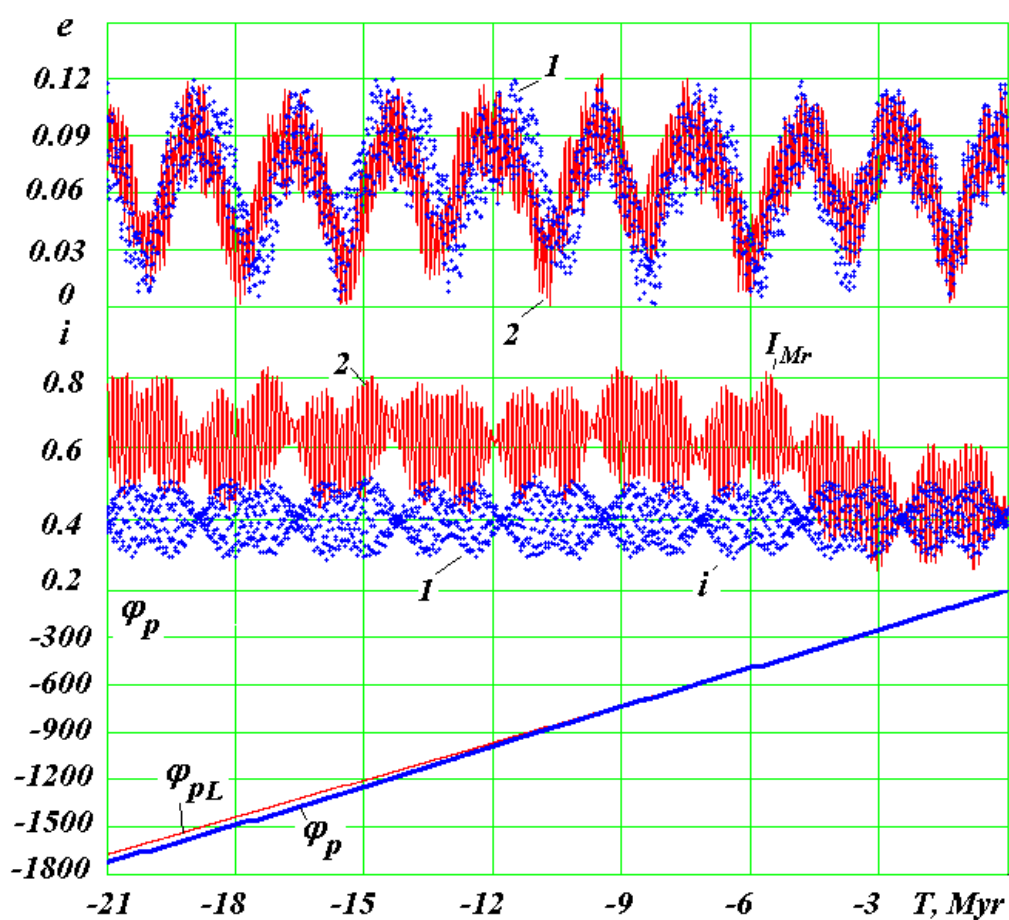


Рис. 8. Сравнение численных решений (1) с вычислениями (2) из работы [4], показывающими эволюцию орбиты Марса за 21 млн. лет (-21 ÷ 0 млн. лет). Обозначения приведены на рис. 3.

## 6. Проблема устойчивости Солнечной Системы.

На протяжении последних трех столетий различными аспектами проблемы устойчивости Солнечной Системы занимались выдающиеся ученые (И.Ньютон, Л.Эйлер, Ж.Лагранж, П.Лаплас, К.Гаусс, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, О.Ю.Шмидт, А.Н.Колмогоров, Н.Д.Моисеев, Г.Н.Дубошин и другие), но, несмотря на их огромные

достижения, эта фундаментальная проблема естествознания до конца до сих пор не решена.

Ж. Ляскар, на основе уточненной им теории вековых возмущений планетных движений, выполнил ряд исследований по устойчивости Солнечной Системы на большие периоды времени, сопоставимые со временем ее существования – 5 млрд. лет. Сравнивая наши численные результаты с его результатами, можно заключить, что на интервалах времени в десятки миллионов лет имеется достаточно хорошая согласованность, однако при переходе на интервалы времени в миллиарды лет появляются, прежде всего, большие технические трудности, поэтому Ж. Ляскому пришлось упростить свою теорию вековых возмущений, и перейти на статистические методы. Последние в принципе дают возможную, но естественно, не действительную картину этого существенно нелинейного явления.

Например, для интервала времени в 250 млн. лет Ж.Ляскар и его коллеги показали [4], что угол наклона орбиты к подвижной плоскости экватора  $I_{Mr}$  может изменяться по-разному, в зависимости от принятой начальной скорости прецессии  $p_{Mr}$  и может достичь при этом больших величин. Значительное изменение угла наклона  $I_{Mr}$  плоскости орбиты Марса к плоскости подвижного экватора Марса (см. рис. 8) авторы интерпретируют как отсутствие устойчивости его орбиты и на этой основе делается вывод о неустойчивости Солнечной Системы и о хаотичности движений в ней.

Однако исследования для меньших периодов времени не подтверждают этот вывод. Например, эволюция наклона  $i_{eL}$  орбиты Марса к эклиптике 2000.0 г. (см. верхние четыре графика на рис. 9), в интервале времени в 40 миллионов лет, указывают на «устойчивость» его орбиты. На этих графиках результаты численного интегрирования (сплошная линия) были сравнены с их решением по вековым уравнениям (штриховая линия). Они отмечают, что заметное расхождение двух решений наблюдается после интервала времени в 32 млн. лет. Ниже, в таком же масштабе, выполнено сравнение угла наклона орбиты  $i_{e0}$  к неподвижной эклиптике 1950г., вычисленного нами по формуле (30) по нашим решениям уравнений (3), с эволюцией угла  $i_{eL}$ , описанной в работе [4]. Их поведение весьма похоже. При наложении графиков  $i_{e0}$  и  $i_{eL}$ , один на другой, они полностью совпадают на интервале времени в 4 миллиона лет, а существенные расхождения начинаются «после» -32 млн. лет. Это дает нам право сделать, по меньшей мере, два вывода:

Во-первых, совпадение углов  $i_{e0}$  и  $i_{eL}$  подтверждает наши соображения в отношении решений К. Остервинтера с соавторами [22], представленных на рис. 6. Во-вторых, подтверждается наш вывод о том, что значительные изменения угла наклона  $I_{Mr}$  плоскости орбиты Марса к подвижной плоскости его экватора (см. работу [4]), вызваны движениями плоскости экватора.

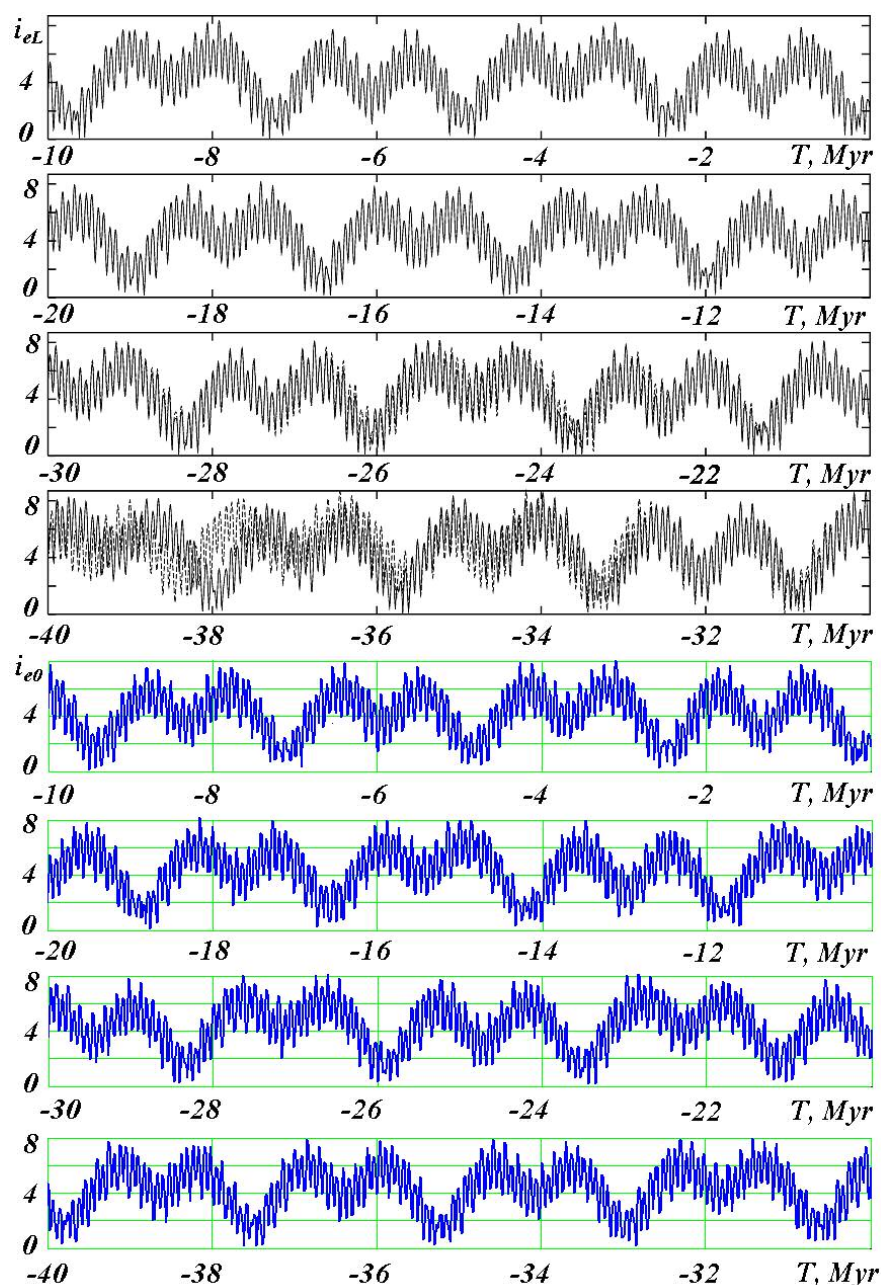


Рис. 9. Сравнение эволюции угла наклона ( $i_{eL}$ ) плоскости орбиты Марса к плоскости эклиптики 2000.0 г. по расчетам Ж. Ляскара. и др. [4], (четыре верхних графика), с эволюцией угла наклона ( $i_{e0}$ ) плоскости орбиты Марса к плоскости эклиптики 1950.0 г. по нашим расчетам (четыре нижних графика) на интервале времени в 40 млн. лет.

Мы исследовали орбиты планет в неподвижных координатах. Из рис.8 видно, что эволюция вычисленного нами угла наклона  $i$  плоскости орбиты Марса неизменна в течение 21 млн. лет. Неизменна эволюция наклона  $i$  и других параметров орбиты на протяжении 50 млн. лет (рис. 5 а), а также в течение просчитанного нами периода в 100 млн. лет (рис. 5б). Подобная эволюция параметров орбиты Марса в неподвижных координатах описана и в работе К. Остервинтера и др. [22] (см. рис. 6), а также в работе [4] (см. рис. 9).

Из этого можно заключить, что большие изменения угла наклона  $I_{M_1}$  плоскости орбиты, приведенные в работе [4], вызваны, прежде всего, движением плоскости экватора.

Из проведенных нами численных исследований вытекает, что на протяжении 100 млн. лет Солнечная Система устойчива, понимая под термином «устойчивость» динамическое подобие ее конфигураций на больших промежутках времени, но в ограниченном по размерам пространстве.

Т.Куинн и его коллеги, в работе [3] справедливо отмечают, что численное интегрирование уравнений движения планет будет способствовать развитию новых аналитических теорий, специально разрабатываемых для исследования динамики Солнечной Системы на больших интервалах времени.

Выполненный анализ и сравнение с результатами других исследователей, дают основание считать, что, полученные нами решения, имеют достаточно высокую точность. Мы сравнили наши результаты, относящиеся к планете Земля, с результатами М. Миланковича [23], Ш.Г.Шараф и Н.А.Будниковой [24], А.Берже и М. Лутре [25]. Сравнение показывает, что более поздние по времени результаты лучше соотгласуются с нашими результатами.

Считаем целесообразным также отметить и некоторые соображения, касающиеся результатов других исследователей. Из нашего анализа достоверно следует, что теория *Д.Брауэера* и *А. Вуркома* А. [21] достаточно хорошо описывает короткопериодические изменения эксцентриситета и долгопериодические колебания наклона плоскости орбиты, однако она менее точно описывает долгопериодические колебания эксцентриситета, а короткопериодические движения плоскости орбиты представлено такими колебаниями, которые, по-видимому, в действительности, отсутствуют. С другой стороны, теория Ж. Ляскара и его коллег [4] хорошо

представляет эволюцию эксцентриситета, перигелия и угла наклона орбиты в неподвижном пространстве на интервале времени в несколько десятков миллионов лет.

## 7. Выводы

1. Мы вычислили вековые изменения параметров орбиты Марса на промежутке времени в несколько тысяч лет ( $-3.4$  тыс. лет  $\leq T \leq 3.6$ ) и сравнили их с аппроксимацией, построенной с помощью наблюдательных данных. Результаты совпадают с достаточно высокой точностью. Сравнение численного решения уравнений (3) на интервале времени в 50 лет (с 30.12.1949 г. по 30.12.1999 г.) с положениями планет, взятыми из Эфемерид DE406/LE406 [9], показывает, что в пределах точности, с которой определены массы планет, положения планет совпадают.

2. Были численно проинтегрированы уравнения движения девяти планет, Луны и Солнца на промежутке времени в 100 млн. лет «в прошлое» и исследована эволюция орбиты Марса. На основании этого, можно сделать следующие выводы:

2.1. Эксцентриситет его орбиты испытывает короткопериодические (с периодом  $T_{e1} = 95.2$  тыс. лет) и долгопериодические (с периодом  $T_{e2} = 2.31$  млн. лет) колебания.

2.2. Наклон плоскости орбиты Марса к неподвижной плоскости экватора и её восходящий узел совершают колебания с периодом в 73.1 тыс. лет.

2.3. Перигелий движется в плоскости орбиты в направлении орбитального движения, совершая один оборот в среднем за 78 тыс. лет.

2.4. На всём интервале времени в 100 млн. лет орбита Марса претерпевает малые изменения, т.е. обладает определенной устойчивостью.

3. Сравнение наших результатов с приближёнными теориями других авторов позволяет качественно оценить области применения этих теорий.

4. Движения в рассмотренной модели Солнечной Системы на интервале времени в 100 млн. лет имеют «стабильный» характер и не проявляется какая-либо тенденция к катастрофическим изменениям в геометрии и динамике Солнечной Системы.

Основные вычисления были выполнены на суперкомпьютерах МВС-1000 Сибирского Суперкомпьютерного Центра СО РАН (г. Новосибирск), Института

Прикладной Математики им. М.В.Келдыша и Вычислительного Центра им. А.А.Дородницына РАН (г. Москва).

Авторы считают необходимым поблагодарить доктора наук М. Креславского за помощь в получении, прежде всего, материалов, изложенных в работах С. Когена, Е. Хьюббарда и С. Остервинтера, Ж. Ляскара с соавторами и других исследователей. Выполненное количественное сравнение наших расчетов с расчетами Ж. Ляскара с соавторами оказалось возможным благодаря тому, что свои результаты названные ученые разместили на сайте <http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/insola/mars/La2003-04/>. Свободный доступ к результатам Лаборатории реактивного движения НАСА на сайте <http://ssd.jpl.nasa.gov/> (JPL Solar System Dynamics) позволил нам уточнить начальные условия и сравнить свои расчеты с современными эфемеридами.

В заключение отметим, что данная работа выполнена при поддержке грантов губернатора Тюменской области за 2003-й и 2004-й годы, интеграционной программы Президиума РАН № 13 за 2004г. и гранта РФФИ 04-01-00227.



## 8. Приложения

### Приложение 1. Цитаты из работ Ж. Ляскара с соавторами.

#### 1. «Large-scale chaos in the solar system»

Abstract. Numerous integrations of the solar system have been conducted, with very close initial conditions, totaling an integration time exceeding 100 Gyr. The motion of the large planets is always very regular. The chaotic zone explored by Venus and the Earth is moderate in size. The chaotic zone accessible to Mars is large and can lead to eccentricities greater than 0.2. The chaotic diffusion of Mercury is so large that its eccentricity can potentially reach values very close to 1, and ejection of this planet out of the solar system resulting from close encounter with Venus is possible in less than 3.5 Gyr.

#### 2. “Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars.”

As the orbital motion is chaotic, even with a precise dynamical model, the computer roundoff numerical error alone will prevent obtaining a precise orbital solution for Mars over more than 60 Myr (see Fig.4.a). Moreover, the obliquity of Mars itself is chaotic, even more chaotic than its orbital motion (Laskar and Robutel 1993. Touma and Wisdom 1993). This will prevent even more drastically obtaining a precise solution for the obliquity over more than 10 to 20 Myr. with the present knowledge of the initial parameters (section 3.2.1).

Our goal in this section will thus be to obtain a solution for the insolation parameters of Mars as precise as possible over 10 to 20 Myr. for use in Mars paleoclimate studies. Then, with the same model, to explore the behavior of the solutions over 250 Myr and to derive a statistical vision of this chaotic system. Although no precise prediction is possible over this time interval, we will be able to derive a precise estimate of the density probability function for the evolution of the eccentricity of Mars and its obliquity. It is in fact paradoxical (see for example Lasota and Mackey 1994) that it is actually the chaotic behavior of the system that will allow us to make a precise prediction of the evolution of the density function of Mars' orbital and rotational parameters.

#### 3. “A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth...”

**2. The orbital solution La90.** The orbital solution La90 is obtained by the numerical integration of an extended averaged system, which represents the mean evolution of the orbits of the planets. All the 8 main planets of the solar system are taken into account, as well as the mean lunar and relativistic perturbations. The use of numerical integration for computing the solution of the secular system is one of the reasons for the good quality of this solution, which was checked by comparing with the available ephemeris over a short time scale (Laskar 1986, 1988). In (Laskar 1988), the solution La88 was represented in quasi-periodic form over 10 Myr, but these representations are slowly convergent, which prevents good accuracy of the solution.

Later on, the reason for this slow convergence was understood to be due to the presence of multiple resonances in the secular system of the inner solar system (Laskar 1990). **Because of these resonances, the motion of the solar system is chaotic**, and not quasi-periodic, as was first demonstrated by the computation of its Lyapunov exponents, which reaches 1/5 Myr (Laskar 1989). **This implies that it is not possible to give any precise solution for the motion of the Earth over more than about 100 Myr, and most probably, ephemerides can only be given with good precision for about 10 Myr to 20 Myr.**

**Приложение 2. Таблицы исходных данных и начальных условий при интегрировании уравнений (3) а также сравнение результатов интегрирования уравнений (3) с эфемеридами.**

Табл. 1. Массы  $m_i$  и начальные условия (первый вариант): координаты  $x_i, y_i, z_i$  и скорости  $v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$  планет от Меркурия (Me) до Плутона (Pl) и Луны (Mo) на 30.0 дек. ЕТ 1949 г.,  $JD_0 = 2433280.5$  в гелиоцентрической экваториальной системе координат на эпоху 1950.0,  $JD_S = 2433282.4234$  при  $G = 6.67259E-11 \text{ м}^3/(\text{с}^2 \cdot \text{кг})$  и массе Солнца:  $1.98911765646E+30$  кг. Положения и скорости – модифицированные данные DE19.

Тела	$m_i, \text{ кг}$	Координаты, м			Скорости, м/с		
		$x_i$	$y_i$	$z_i$	$v_{xi}$	$v_{yi}$	$v_{zi}$
Me	3.32462E+23	51451371876.2197	6823568174.75167	-1634415569.98258	-14659.2853816947	44351.5132622098	25256.7096329313
Ve	4.869E+24	21388391208.9948	96791808863.7023	42259236150.9888	-34445.734417752	5390.50795859843	4604.86892148603
Ea	5.9742E+24	-20403349572.3061	133649779200.966	57962499498.9961	-29982.2390350433	-3894.92114820137	-1690.42257915082
Ma	6.4191E+23	-204926756004.512	126133319400.949	63405879798.2523	-12786.2796102665	-16409.8466816399	-7188.5117548751
Jp	1.8988E+27	501063754034.797	-519675392681.743	-235195315982.077	9671.45813229624	8592.04165989274	3449.57181755033
Sa	5.685E+26	-1342285170665.77	341044959330.524	199023100858.158	-3217.56963808403	-8629.44636855088	-3428.76469351675
Ur	8.6625E+25	-150035825137.752	2591594394295.33	1137683474058.44	-6848.45451198089	-650.865182644724	-188.460863014761
Ne	1.0278E+26	-4367462454310.03	-1154797346757.77	-363116492414.853	1421.18239257454	-4799.82638972212	-2001.79537726796
Pl	1.09775E+24	-3924270721583.65	3076004854807.31	2160776068098.85	-2278.14800627023	-4536.19858950397	-739.431338563464
Mo	7.35E+22	-20099352853.0859	133857559955.206	58067973377.9	-30562.0814206052	-3153.29849566654	-1270.85380799933

Табл. 2. Массы  $m_i$  и начальные условия (второй вариант): координаты  $x_i, y_i, z_i$  и скорости  $v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$  планет от Меркурия (Me) до Плутона (Pl) и Луны (Mo) на 30.0 дек. ЕТ 1949 г.,  $JD_0 = 2433280.5$  в гелиоцентрической экваториальной системе координат на эпоху 2000.0,  $JD_S = 2451544$  при  $G = 6.67259E-11 \text{ м}^3/(\text{с}^2 \cdot \text{кг})$  и массе Солнца:  $1.98891948976803E+30$  кг. Положения и скорости – данные DE406/LE406.

Тела	$m_i, \text{ кг}$	Координаты, м			Скорости, м/с		
		$x_i$	$y_i$	$z_i$	$v_{xi}$	$v_{yi}$	$v_{zi}$
Me	3.30187842779737E+23	51378500712.7917	7398730258.73134	-1384413714.5863	-15276.8167285921	44183.2585096919	25183.7713637451
Ve	4.86855338156022E+24	20098437756.1693	97022456883.2422	42359548922.943	-34525.343689039	5004.73164455778	4437.16576036982
Ea	5.97369899544255E+24	-22177799063.1322	133409762224.645	57858151723.3985	-29927.5728090066	-4228.84376557956	-1835.38708532847
Ma	6.4185444055007E+23	-206626992480.617	123830934957.816	62404742310.1315	-12566.7488056756	-16551.3429850097	-7249.99987165166
Jp	1.89900429500553E+27	507971625555.693	-514027686416.492	-232739248300.242	9557.787142254	8699.41711715317	3496.24926688155
Sa	5.68604198798257E+26	-1346946949935.64	326006202166.041	192483689461.594	-3104.13240669983	-8664.66647884277	-3444.08286511961
Ur	8.68410787490547E+25	-184532065685.545	2589691250995.06	1136852552974.41	-6839.65008976224	-727.382755054996	-221.718557104065
Ne	1.02456980223201E+26	-4352452287291.9	-1203523662980.49	-384291106982.115	1484.35872636776	-4783.5269899047	-1994.70645836478
Pl	1.65085753263927E+22	-3969057713524.92	3031889154729.01	2141676186885.16	-2223.92294605229	-4561.78400082869	-750.399172063762
Mo	7.34767263035645E+22	-21860138201.1275	133632383977.255	57970881141.0125	-30536.9357540009	-3571.10974187999	-1466.38653570499

Табл. 3. Сопоставление результатов интегрирования уравнений (3) за 50 лет, с 30.0 дек. 1949 г. JD0 = 2433280.5 до 30.0 дек. 1999 г. JDf = 2451542.5 (верхние числа) с данными DE406/LE406 на ту же конечную дату (нижние числа). Координаты  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  и скорости  $v_{xi}$ ,  $v_{yi}$ ,  $v_{zi}$  планет от Меркурия (Me) до Плутона (Pl) и Луны (Mo) в гелиоцентрической экваториальной системе координат на эпоху 2000.0, JD = 2451544;  $\Delta\varphi_i$  – проекция на плоскость экватора разности углового положения тел на орбите.

Тела	Координаты, м			Скорости, м/с			$\Delta\varphi_i$ радианы
	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$v_{xi}$	$v_{yi}$	$v_{zi}$	
Me	-27244931161.36578	-57547047079.05123	-27913749550.38322	35013.83456495187	-13510.56095560906	-10848.24752917202	9.851E-5
	-27250751819.76618	-57544485667.38114	-27911777753.74239	35011.77049279869	-13515.3275344842	-10850.57935386931	
Ve	-107488775402.6213	4508043.433882821	6804610208.31456	-1083.587133251849	-32097.14673367943	-14371.49148962517	2.171E-6
	-107488764214.6746	4745110.048553557	6804716122.693854	-1083.670285579284	-32097.14769414636	-14371.48662231141	
Ea	-20039777471.25795	133711555559.6049	57970416797.15794	-29998.02022870762	-3814.898490683077	-1654.426543729306	-4.501E-6
	-20040383501.21171	133711493201.8992	57970388317.83772	-29998.03736247704	-3815.022803925509	-1654.476364250177	
Ma	207725381980.5454	-4958199493.666488	-7890749392.650456	1824.915025362562	23910.81526617862	10917.78330229408	-9.518E-6
	207725522951.1265	-4956233639.810995	-7889850986.827501	1824.655481281149	23910.82245919431	10917.793483078	
Jp	600272372864.9594	407182549280.8615	159908186034.7253	-7867.863761424506	10212.08818437833	4568.95256774887	-1.910E-6
	600271538043.9522	407183656391.9888	159908680579.1977	-7867.884321515599	10212.07391886902	4568.946941038761	
Sa	959990440191.2358	922394198483.991	339686323126.5457	-7421.340204237804	6119.467955244539	2846.724756339436	-7.870E-7
	959989658746.129	922394901617.7257	339686647213.0083	-7421.345521813606	6119.462360989111	2846.722675206618	
Ur	2157973036652.258	-1871830749562.907	-850356722393.0418	4639.399347233582	4260.85932689923	1800.516264157553	-2.269E-7
	2157973612539.625	-1871830390715.251	-850356575438.5552	4639.397946737375	4260.860147703253	1800.516647445246	
Ne	2514082274539.627	-3438399709289.256	-1469944545800.924	4466.730071503929	2887.755850345153	1071.003275988534	-1.979E-7
	2514083052562.011	-3438399345461.22	-1469944416163.849	4466.72940525403	2887.756455291418	1071.003539817953	
Pl	-1478463862173.61	-4185154424340.236	-860265513672.4745	5243.729378621804	-1953.631698552901	-2190.768497175936	-2.060E-7
	-1478463046087.412	-4185154855001.015	-860265895224.6543	5243.729531171102	-1953.630796975506	-2190.768268488547	
Mo	-20421412252.06083	133620881993.3932	57967399445.62585	-29839.60237015856	-4732.942291554387	-2010.441015676699	-4.276E-6
	-20421819304.72665	133619777434.6888	57967006904.80833	-29836.74314646615	-4732.402371602139	-2010.541969780811	

### Приложение 3. Исследование достоверности результатов интегрирования уравнений (3).

В процессе решения, сравнения с наблюдениями и анализа структуры погрешностей мы использовали различные методы контроля точности решений. Приведем некоторые из них.

**1. Контроль сохранения общего момента количества движения  $M$  Солнечной Системы.** В силу существования десяти первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3) [ 8 ], например, проекция момента  $M_z$  на ось  $z$  имеет вид

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_i (v_{yi} x_i - v_{xi} y_i) = \text{const}, \quad (41)$$

где  $n$  – количество тел ( в нашей модели  $n=11$ ).

Если наблюдается изменение  $M$ , это свидетельствует о погрешности вычислений. При шаге интегрирования  $\Delta t=1 \cdot 10^{-4}$  года, относительное изменение проекции момента на ось  $z$  после 10 тыс. лет составляет  $\delta M_z = 1.4 \cdot 10^{-14}$ , а после 100.08 млн. лет –  $\delta M_z = 7.9 \cdot 10^{-11}$ . Мы установили, какими могут быть погрешности в движении тел при вышеупомянутом изменении момента. Например, при шаге счета  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$  года и  $\delta M = -4.5 \cdot 10^{-14}$  смещение тела по орбите за 10 тыс. лет изменяется в радианах (см. табл. 3) от значения  $-4.94 \cdot 10^{-10}$  для Плутона до значения  $3.44 \cdot 10^{-4}$  для Луны. Если изменение параметров орбиты за этот период значительно превышают эти погрешности, то такие результаты нельзя считать достоверными.

**2. Контроль количества движения Солнечной Системы  $P$ .** Аналогично его проекция , например, на ось  $x$  имеет вид:

$$P_x = \sum_{i=1}^n m_i v_{xi} = 0. \quad (42)$$

Отличие величины  $P$  от нуля также свидетельствует о накоплении погрешностей вычислений. В начальный момент, из-за округления при переходе к двоичным кодам, величина  $P$  отличается от нуля и равна  $5 \cdot 10^{-18}$ . После реализации счета на 10 тыс. лет  $P = 2.4 \cdot 10^{-15}$ , а после 100.08 млн. лет –  $P = 3.6 \cdot 10^{-13}$ . Здесь и в дальнейшем приведены безразмерные величины.

**3. Учет влияния разных точностей счета.** Если при повышении точности счета результаты повторяются, то их можно считать достоверными.

**4. Вычисление параметров движения тел в « прошлое» и в « будущее».** Сравнивая два решения (в «прошлое» и в «будущее») при «безошибочных» вычислениях не должны появиться какие-либо скачки в изменениях параметров в начальный момент времени.

**5. Расчеты в отдаленную по времени эпоху и возвращение в исходную.** Это позволяет выявить все погрешности вычислений, их величину и структуру. Было установлено, что основная погрешность заключается в смещении тела на орбите (например, от  $1.5^\circ$  для Меркурия до  $4.5^\circ \cdot 10^{-9}$  для Плутона при счете на 10 тыс. лет с шагом  $\Delta t=2 \cdot 10^{-4}$  года) без существенного изменения орбиты. Наибольшее смещение в этом случае наблюдается у Луны, и оно достигает  $180^\circ$  относительно Земли. При шаге счета  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  года смещение Луны по ее орбите равняется  $2'$ . Следует отметить, что этот тест дает завышенные погрешности из-за разрыва начальных производных при обратном счете.

**6. Использование тестовых задач, имеющих точное аналитическое решение.** Такой задачей является, например, осесимметричное взаимодействие  $n$ -тел, находящихся в одной плоскости [15]. Этот метод позволяет выявить вычислительные погрешности, прежде всего, в самой тестовой задаче и было установлено, что погрешность увеличивается с увеличением эксцентриситета орбиты. При эксцентриситете, равном эксцентриситету Меркурия, в задаче 12-ти тел смещение их по орбите за 10 тыс. лет равняется  $0.16''$  при шаге  $\Delta t=2 \cdot 10^{-4}$  года.

#### **7. Сравнение с данными наблюдений.**

**7.1. Сравнение координат и скоростей тел на интервале в несколько десятков лет.** Например, мы вычислили положение тел на дату 30.12.1999,0 г по начальным данным, известным на 30.12.1949,0 г. и получили, что средняя «по всем телам» относительная погрешность в положениях небесных тел за 50 лет составила  $\delta r_{\Sigma} = 1.14 \cdot 10^{-5}$ .

Такое сопоставление позволяет выявить погрешность в начальных условиях, в исходных данных (например, в массах тел), а при высокой точности счета и погрешность в наблюдениях.

7.2. Сравнение расчетной траектории Солнца с траекторией, определенной по эфемеридам планет за 60 лет. Мы получили практически совпадение расчетов [6] с данными эфемерид.

**Б. Смещение по орбите.** Существует достаточно богатое разнообразие способов проверки результатов интегрирования уравнений. Наши исследования и исследования других авторов, показали, что наибольшая погрешность в решениях проявляется в смещении тела по его орбите. В табл. 3 представлены результаты наших исследований о зависимости смещений тел по орбите  $\Delta\varphi_i$  (точнее, проекция смещения на плоскость экватора) от относительной погрешности в моменте количества движения Солнечной Системы  $\delta M$ . Величины  $\Delta\varphi_i$  определяются по формуле

$$\Delta\varphi_i = \arctg(y_i/x_i) - \arctg(y_{0i}/x_{0i}), \quad (43)$$

где  $y_{0i}, x_{0i}, y_i, x_i$  – координаты тел в барицентрической экваториальной системе координат;

$y_{0i}, x_{0i}$  – координаты тел в решении с наименьшим значением  $\delta M = 1.46 \cdot 10^{-14}$  при  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$  года и с удвоенной точностью;

$\Delta\varphi_i$  – проекция смещения  $i$ -того тела по орбите на плоскость экватора.

В последней строке таблицы 3 дано смещение Луны относительно Земли (МоЕ), которое определяется по формуле:

$$\Delta\varphi_{MoE} = \arctg[(y_{10} - y_3)/(x_{10} - x_3)] - \arctg[(y_{010} - y_{03})/(x_{010} - x_{03})], \quad (44)$$

где индекс 10 относится к Луне, а индекс 3 - к Земле.

В расчетах, представленных в столбцах 1 – 5, последовательно увеличивался шаг  $dt$ , вследствие чего погрешность момента  $\delta M$  увеличивалась. При увеличении шага на порядок погрешность момента возросла на 5 порядков. Погрешность положения  $\Delta\varphi_i$ , как видно из таблицы 4, для разных тел изменяется по-разному. Для внешних планет она практически не изменяется, а для внутренних планет и, особенно для Луны, погрешность положения растет с увеличением относительной погрешности момента  $\delta M$ . Например, для Меркурия  $\Delta\varphi_i$  возрастает на 8 порядков, поэтому величину  $\delta M$  можно считать интегральной характеристикой точности вычислений. На этом основании мы составили таблицу смещений по орбитам в зависимости от величины изменения момента  $\delta M$  для одиннадцати тел плюс смещение Луны относительно Земли.

Табл. 4. Смещение тел по их орбитам  $\Delta\varphi_i$  за -10 тыс. лет в решениях с разным изменением момента  $\delta M$  по отношению к решению с расширенной длиной числа (34 десятичных знака) при  $dt = 1 \cdot 10^{-4}$  года и  $\delta M = 1.46 \cdot 10^{-14}$ : расчет в прошлое от эпохи 1949, дек. 30.0 ET,  $JD_0 = 2433280.5$ ;  $\Delta\varphi_i$  – в радианах; планеты от Меркурия (Me) до Плутона (Pl), Mo – Луна, Su – Солнце; MoE – смещение Луны относительно Земли.

Тело	$i$	1	2	3	4	5
		$\delta M = -4.5 \cdot 10^{-14}$ $dt = -1 \cdot 10^{-4}$	$\delta M = 2.3 \cdot 10^{-13}$ $dt = -4/3 \cdot 10^{-4}$	$\delta M = 3.4 \cdot 10^{-13}$ $dt = -2 \cdot 10^{-4}$	$\delta M = 4.7 \cdot 10^{-11}$ $dt = -5 \cdot 10^{-3}$	$\delta M = 1.5 \cdot 10^{-9}$ $dt = -1 \cdot 10^{-3}$
Me	1	-4.78076E-8	0.000813003	0.00784215	0.880401	6.234269
Ve	2	-4.41872E-8	2.13205E-7	2.93696E-6	0.000296793	0.00947411
Ea	3	-1.21898E-7	-1.00427E-5	-6.11468E-5	-3.43795E-5	-0.000247816
Ma	4	-3.21748E-8	8.11215E-9	5.47077E-10	1.2199E-7	4.19873E-6
Jp	5	-2.85178E-9	-8.8565E-10	-1.57537E-9	-1.95009E-10	3.13616E-12
Sa	6	5.65911E-10	1.46593E-9	3.15613E-9	-1.40978E-9	1.44393E-10
Ur	7	2.02969E-11	-5.09915E-10	7.50903E-10	-6.51694E-11	-7.28375E-11
Ne	8	-7.06222E-10	3.01113E-10	-3.27041E-10	-6.95799E-12	-2.10711E-10
Pl	9	-4.93649E-10	8.25153E-11	-8.58744E-11	-2.79003E-11	-1.09287E-10
Mo	10	-2.52436E-7	0.000822199	0.00496378	0.00238666	0.00119156
Su	11	-1.79509E-9	3.66315E-9	4.20909E-08	7.5401E-6	2.03371E-6
MoE	12	0.000344309	0.941297	3.07668	7.84055	11.41+2·к·π

**В. Сравнение результатов интегрирования уравнений (3) с эфемеридами.** Уравнения (3) были проинтегрированы с шагом с  $dt = 1 \cdot 10^{-4}$  года со вторым вариантом начальных условий

по DE406/LE406 (см. табл. 2) в эпоху  $JD_0 = 2433280.5$  за 50 лет до 00 h ET 30.12.1999 г. с  $JD_f = 2451542.5$  и сопоставлены с данными DE406/LE406 на ту же дату. В табл. 4 приведены результаты сравнения декартовых координат и скоростей тел, а также угловых смещений  $\Delta\varphi_i$ , рассчитанных нами положений тел относительно положений тел, данных в «эфемериде» DE406/LE406. Величина  $\Delta\varphi_i$  была вычислена по формуле (43) при  $y_{0i} = y_{ji}$  и  $x_{0i} = x_{ji}$  – координаты тел- по данным из « DE406/LE406» в барицентрической экваториальной системе координат. Для Земли это смещение  $\Delta\varphi_3 = -0.93''$ . Среднее относительное отклонение положений тел  $\delta r_\Sigma = 1.14 \cdot 10^{-5}$  (по 11 небесным телам), где

$$\delta r_\Sigma = \sum_{i=1}^n |\vec{r}_i - \vec{r}_{ji}| / r_{ji};$$

$\vec{r}_i$  - барицентрический радиус-вектор рассчитанного положения  $i$ -того тела;

$\vec{r}_{ji}$  - такой же вектор  $i$ -того тела, полученный из эфемерид DE406/LE406.

Время счета в юлианских столетиях определялось по формуле

$$T = (JD_f - JD_0) / (k_T \cdot 36525),$$

где  $k_T = 1.000017537231278$  – коэффициент приведения расчетного времени к эфемеридному времени. Отличие  $k_T$  от 1 объясняется различиями принятых при интегрировании исходных данных от действительных.

Аналогично мы проинтегрировали уравнения на промежутке времени в 50 лет со вторым вариантом начальных условий, с шагом интегрирования  $dt = 1 \cdot 10^{-5}$  года и с расширенной длиной числа. Погрешность момента в этом случае получилась равной  $\delta M_z = 7.39 \cdot 10^{-22}$  и по сравнению с погрешностью в предыдущем решении,  $\delta M_z = 1.23 \cdot 10^{-14}$ . Таким образом, точность улучшилась на **восемь порядков**, и при этом результаты отклонений не изменились.

Отметим также, что сравнение результатов интегрирования уравнений (3), выполненное с первым вариантом данных по каталогу DE19, с данными на дату 8.01.1994 г. по Астрономическому ежегоднику, дало среднее отклонение положения  $\delta r_\Sigma = 1.62 \cdot 10^{-3}$  и  $k_T = 1.0001337$ . Таким образом, второй вариант исходных данных и начальных условий привел к уменьшению отклонения положения на два порядка и уменьшению отличия коэффициента  $k_T$  от 1 на порядок. Отсюда можно заключить, что второй вариант начальных условий и данные, взятые из эфемерид DE406/LE406, являются более точными.

Как было отмечено ранее, отличие между массами планет значительно больше достигнутой величины среднего значения (по всем телам) относительного отклонения положений тел  $\delta r_\Sigma = 1.14 \cdot 10^{-5}$ . Например, неопределенность гравитационной постоянной  $G$  согласно Конвенции IERS2003 (см. сайт IERS Conventions Center. IERS Conventions (2003) - <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html>) составляет  $\delta G = 1.5 \cdot 10^{-4}$ . Поэтому можно считать, что в пределах точности задания масс результаты расчетов совпадают с эфемеридами DE406/LE406.

Несмотря на то, что расчеты, основанные на втором варианте начальных условий являются более точными, сравнение вековых возмущений показывает, что они практически не отличаются от расчетов, основанных на первом варианте начальных условий (см. рис. 3). Поэтому представленные в статье результаты интегрирования в промежутке времени, равном 100 млн. лет и основанные на первом варианте начальных условий, существенно не изменятся при переходе к более точным начальным условиям.

## Литература

1. *Laskar J.* Large-scale chaos in the solar system // *Astron. Astrophys.* – 1994. – Vol. 287, L9 – L12.
2. *Laskar J.* Marginal stability and chaos in the Solar system / Ferraz Mello S. et al. (eds.), *Dynamics, ephemerides and astrometry of the Solar System.* – IAU: Netherlands. – 1996. – P. 75 – 88.
3. *Quinn T. R., Tremaine S., Duncan M.* A three million year integration of the earth's orbit // *Astronomical Journal.* – 1991. – V. 101. – P. 2287-2305.
4. *Laskar J., Correia A. C. M., Gastineau M., Joutel F., Levrard B. and Robutel P.* Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars // *Icarus.*– 2004.– Vol. 170, Iss. 2.– P. 343-364.
5. *Смульский И.И.* Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999. – 294 с.
6. *Мельников В.П., Смульский И.И., Кротов О.И., Смульский Л.И.* Орбиты Земли и Солнца и возможные воздействия на криосферу Земли (постановка проблемы и первые результаты// *Криосфера Земли.* – 2000 - Т. IV, №3, с. 3-13.
7. *Мельников В. П., Смульский И.И.* Астрономические факторы воздействия на криосферу Земли и проблемы их исследования// *Криосфера Земли.* – 2004. – Т. VIII, № 1, с. 3–14.
8. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина.* Изд. 2-е, доп. и перераб. М., Наука, 1976, 862 с.
9. *Стэндиш Е.М. (Standish E.M.)* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405.// Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F – 98-048. August 26. 1998. (<ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/export/DE405/>).
10. Труды ИПА РАН. Вып. 10. Эфемеридная астрономия. – Санкт-Петербург: ИПА РАН, 2004 – 488 с.
11. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984, 136 с.
12. *Стеффенсон К.Ф. (Steffensen K.F.)* On the problem of Three Bodies in the Plane. - Kong. Danske Videnskab. Selskab., Mat. Fys. Medd. 1957, v. 13, N 3, 18 p.
13. *Яров-Яровой М.С.* О применении уточненных методов численного интегрирования в небесной механике. Труды ГАИШ. - М., 1974, т. 45, с. 179-200.
14. *Гребеников Е.А., Козак-Сковородкина Д. и Якубяк М.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. – Москва: Из-во Российского университета дружбы народов. – 2001 г. – 213 с.
15. *Смульский И.И.* Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел// *Математическое моделирование.* – 2003, а, т. 15, № 5, с. 27-36.

16. *Гребеников Е.А.* Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновской проблеме многих тел//Математическое моделирование.-1998.-Т.10, N8. - С.74-80.
17. *Смульский И.И.* Новая геометрия эволюции орбит // Proceeding of Joint International Scientific Conference “New Geometry of Nature, August 25 – September 5, 2003, б, Kazan State University, 2003. – с. 192-195.
18. *Смульский И.И.* Расчет взаимодействий в Солнечной системе за 50 млн. лет для изучения эволюции климата // «Большая Медведица». Журнал проблем защиты Земли. – Межрегиональный общественный фонд им. Ломоносова. Новосибирск, Россия.– 2005 г. No. 1, с. 44-56.
19. Newcomb S. The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy. Washington: Government printing office. 1895. –202 p.
20. *Симон Дж.Л. и др.* (Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J. et. al.) Numerical Expression for Precession Formulae and Mean Elements for the Moon and the Planets // Astron. Astrophys. – 1994, vol. 282, p. 663-683.
21. *Браувер Д. и Вурком А.* (Brouwer D., Van Woerkom A. J. J.) The secular variation of the orbital elements of the principal planets// Astr. Pap. - 1950. – 13, 2.
22. *Коген, Хьюббард и Остервинтер* (Cohen C.J., Hubbard, E. C.; Oesterwinter C.) Planetary Elements for 10,000,000 Years//Celestial Mechanics. – 1973. – No. 3. –Рр. 438-448.
23. *Миланкович М.* Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата. – М.-Л. –ГОНТИ. – 1939. –207 с.
24. *Шараф Ш. Г. и Будникова Н. А.* О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прошлого. // Бюл. ИТА АН СССР. 1967, вып. 11, № 4 - С. 231 - 261.
25. *Берже А. и Лоутре М.Ф.* (Berger A. and Loutre M. F.) Insolation values for the climate of the last 10 million years// Quaternary Science Reviews. - 1991. - № 10, P. 297 - 317.